

MÉMOIRE DE MASTER 2

MASTER EFE-ESE

ANNÉE 2012-2013

Ecole Interne IUFM Midi-Pyrénées/UT2
En partenariat avec : UT1, UT3 et CU-JF Champollion

Présenté et soutenu par :

Marie-Anne PECH

TITRE DU MÉMOIRE

**Utilisation de textes historiques en mathématiques à l'école
élémentaire**

ENCADREMENT :

Sébastien MARONNE, Maître de conférences à l'université Paul Sabatier

Eric LAGUERRE, Maître de conférences à l'IUFM de Toulouse

TRAJET RECHERCHE

MATHEMATIQUES ACQUISITION ET ENSEIGNEMENT DES

MATHEMATIQUES A L'ECOLE

Centre départemental : Toulouse

Tables des matières

<u>Introduction</u>	5
<u>Une problématique</u>	6
1^{ère} partie : Aspects théoriques	9
<u>I. De l'histoire des mathématiques vers l'enseignement</u>	11
1. Le document historique	11
2. Pistes pour aider l'enseignant	12
3. Les caractéristiques du support historique mathématique	15
<u>II. Des situations-problèmes vers l'histoire des mathématiques</u>	17
1. Définition selon Guy Brousseau	17
2. La situation-problème selon O. Bassis	18
3. Un exemple : la numération	19
4. Exemples d'utilisation de textes historiques en classes	21
a. La numération et les abaques romains	22
b. L'addition au XVII ^{ème} siècle	23
5. Bilan	24
<u>III. Les recherches actuelles</u>	26
1. Les PER et AER	26
a. Un constat : la perte du sens des mathématiques enseignées dans le secondaire	26
b. Buts et origines des PER/AER	27
c. Les dispositifs AER et PER	28
2. La classification des documents historiques	29
a. Les différents « pourquoi »	30
b. Les différents « comment »	31
c. Les interrelations « pourquoi »/ « comment »	32
d. Critiques	34
3. Synthèse et perspectives	35
2^{ème} partie : Expérimentation et pratique	37
<u>I. Multiplication « per gelosia »</u>	39
1. Présentation du texte historique	39
a. La multiplication « per gelosia »	39
b. Analyse du texte	40
2. Pistes d'exploitation	41

a. En mathématique.....	41
b. En français	41
c. En histoire	41
3. Analyse du fascicule selon les critères de Jankvist.....	42
II. Baguettes de Roussain	43
1. Présentation des baguettes	43
2. Pistes d'exploitation.....	44
3. Analyse du fascicule selon les critères de Jankvist.....	44
III. Conclusion-discussion	45
Annexes.....	46
Annexe 1.....	47
Annexe 2.....	48
Annexe 3.....	50
Document 1	50
Document 2	51
Document 3	52
Annexe 4.....	53
Document 1	53
Document 2	54
Annexe 5.....	61
Document 1	61
Document 2	62
Document 3	63
BIBLIOGRAPHIE	66

Introduction

« Dans l'enseignement des mathématiques rien n'est donné tout est à construire » (Cerquetti-Aberkane & al., 2002). En lisant cette phrase, on ressent la dimension des mathématiques d'être une science en perpétuelle évolution et changement. Car les mathématiques ont une histoire contrairement à ce que pense la majorité des enseignants qui les voit comme un produit fini, quelque chose de figé. Les mathématiques permettent un double voyage ; elles nous envoient dans le temps car le savoir de maintenant a été construit par l'humanité d'hier. Elles nous envoient aussi dans l'espace car les savoirs doivent être resitués dans leur contexte de construction, on parle d'approche culturelle.

A l'école maternelle, on enseigne les mathématiques dans le domaine qui s'appelle 'Découvrir le monde'. Puis petit à petit, on divise ce domaine et les mathématiques deviennent une discipline à part entière. A l'école, les mathématiques sont plutôt perçues comme un ensemble de notions et de concepts à retenir et, de techniques à maîtriser. Les élèves semblent percevoir les mathématiques comme une science sans évolution. C'est pourquoi, leur faire découvrir les mathématiques à travers leurs origines peut être intéressant.

L'histoire des mathématiques n'est pas au programme de l'école élémentaire, ni de l'enseignement obligatoire, pourtant on constate que les chercheurs s'y intéressent. Cela paraît être un moyen de donner du sens aux notions apprises en les replaçant dans leur contexte d'origine, en tant qu'espèce de l'histoire culturelle. Car à l'école, l'élève apprend tout ce que l'humanité a mis des siècles à construire. L'histoire des mathématiques se base sur des sources historiques ; on cherche à comprendre à travers ces documents l'origine des avancées mathématiques. C'est un travail d'historien et de mathématicien car il faut saisir aussi un minimum les concepts mathématiques. Ces avancées sont analysées et permettent de donner du sens à nos concepts actuels.

Pour travailler à l'école avec des documents historiques, commençons par comprendre ce qu'est un support historique en mathématiques car il existe différents ouvrages sur le sujet qui vont du livre pour le spécialiste avec uniquement des sources

historiques, à l'écrit plus pédagogique qui propose des activités à réaliser en classe avec les élèves. A l'école, l'enfant est placé dans diverses situations d'apprentissage dont la situation-problème, où il est acteur et constructeur de son savoir. Nous étudierons ces mises en œuvre et tenterons de faire un rapprochement avec les supports historiques utilisables en mathématiques. Ces démarches pédagogiques sont issues de recherche en didactiques des mathématiques. Aujourd'hui, les investigations continuent sur de possibles nouvelles mises en pratique comme les Activités d'Etudes et de Recherche (AER) et les Parcours d'Etudes et de Recherches (PER) et, sur l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Tout ceci, nous permet de fixer un cadre théorique au mémoire.

Dans un second temps, une mise en pratique sera proposée avec comme support les cadres fixés dans la partie théorique. Nous évoquerons le choix des textes, les pistes de mises en œuvre, les choix de démarche, puis nous les analyserons pour répondre à la problématique.

Une problématique

Les sources historiques aident à la compréhension des mathématiques qui nous entourent aujourd'hui. Les nombres et leurs significations se sont construits dans un temps plus ou moins long et sont issus de besoins réels d'amélioration de l'ancien système, comme par exemple le cas du zéro en numération. A l'école, l'élève construit, lui aussi, son sens des nombres et ses connaissances pour pouvoir appréhender la société dans laquelle il vit. Les enseignants abordent en général, par le biais de la situation-problème, les notions les plus complexes et essentielles. L'élève peut alors intérioriser les notions comprises et non les apprendre simplement par cœur : c'est un des buts de la situation-problème. Enfin, on constate que les textes historiques mathématiques peuvent être utilisés comme supports de base de la situation-problème. Ils ont pour effet, entre autre, de susciter l'intérêt de l'élève et de le faire entrer dans l'activité. L'enfant peut donner du sens à la nouvelle notion car elle est cohérente avec la nécessité de s'améliorer face à une situation inadaptée aux anciens outils.

Au contraire, au niveau du collège et du lycée, les enseignants de mathématiques et les chercheurs en didactique des mathématiques ont constaté un fort désintérêt pour la discipline qui semble avoir perdu son sens. Les mathématiques n'ont plus de lien avec la réalité du quotidien et du monde selon les élèves du secondaire. Les Activités d'Etudes et de Recherches (AER) et les Parcours d'Etudes et de Recherches (PER) ont vu le jour pour pallier ce manque depuis les années 2000. Cette pratique n'est pas encore très répandue et propose une réorganisation des contenus des programmes scolaires pour redynamiser l'enseignement des mathématiques et le rendre plus concret et plus compréhensif aux yeux des élèves.

L'utilisation des textes historiques mathématiques et leur enseignement ont été classés par des chercheurs et notamment Jankvist (2009), un chercheur danois. Il propose une classification de l'utilisation de l'histoire en « comment » et « pourquoi ». Le « comment » représente les méthodes utilisées pour introduire l'histoire des mathématiques dans la classe. Les méthodes sont regroupées en trois types d'approches : l'approche anecdotique, avec l'introduction de faits isolés, l'approche par module d'apprentissage avec des séquences d'enseignements basées sur l'histoire autour d'un thème mathématique précis avec des sources primaires ou secondaires et l'approche historique intégrée se base sur des développements historiques de l'objet mathématique étudié pour l'élaboration d'une séquence complète d'enseignement. Le « pourquoi » représente l'ensemble des arguments. Il y a deux visions : la perception de l'histoire comme un outil ; c'est-à-dire pour motiver les étudiants, pour humaniser les mathématiques, pour un approfondissement, etc, et l'histoire perçue comme un objectif en soi car on apprend ce que sont les mathématiques, on leur donne du sens, on montre leurs évolutions constantes dans le temps et l'espace, on développe des réflexions métamathématiques. La dialectique outil/objet de Douady peut permettre par ces changements de cadres d'utiliser les supports historiques en mathématiques.

De plus, l'utilisation de documents historiques mathématiques suscite chez les enseignants de nombreuses appréhensions car ils se sentent impuissants face aux origines de certains concepts et manque de cadres méthodologiques, surtout dans l'enseignement primaire où l'enseignant est polyvalent et non spécialiste en mathématiques. Selon David Guillemette (2011), un doctorant québécois, l'introduction

de l'histoire dans l'apprentissage des mathématiques doit être resituée au sein de la didactique des mathématiques. Il faudrait se servir de l'apport de cadres méthodologiques reconnus en sciences de l'éducation, avec des travaux issus de la sociologie, de l'anthropologie. Cela permettrait sûrement de construire une méthodologie plus efficace à proposer aux enseignants.

Dans le cadre de l'école élémentaire, l'histoire mathématique est utilisée en général de façon anecdotique ou pour faire entrer l'élève dans l'activité. Par exemples, dans *Pour comprendre les mathématiques, CE2* (1996), les supports historiques sont présents en fin de chapitre avec une présentation et quelques exercices d'application directe ; dans la collection *Cap Maths* du cycle 3, on présente différents objets mathématiques au fil du cycle (numération maya en CE2 et boulier japonais en CM2) sous forme d'information avec quelques exercices d'application directe. L'histoire n'est pas un objectif en soi et elle n'est d'ailleurs pas au programme. L'utilisation de textes historiques mathématiques en tant qu'outil d'apprentissage est plus courante car il permet à l'enfant de construire son savoir ou de le retravailler dans une situation-problème. Dans le cadre de ce mémoire, nous allons utiliser des textes historiques sur le thème de la numération, en situation-problème au niveau du cycle 3 de l'école élémentaire.

Nous tenterons de répondre aux questions suivantes :

- Dans quel cadre utiliser des textes historiques mathématiques à l'école ? Pour cela, nous utiliserons les travaux de recherches de Jankvist et Guillemette.
- Pourquoi et dans quels buts utiliser des sources historiques ? On effectuera des lectures qui dégageront les caractéristiques des supports historiques mathématiques.
- Comment mettre en place l'utilisation de supports historiques mathématiques ? On proposera des kits d'utilisation à destination des enseignants.

1^{ère} partie : Aspects théoriques

I. De l'histoire des mathématiques vers l'enseignement

Depuis, bien avant l'invention de l'écriture, les mathématiques étaient utilisées pour le partage des récoltes dans les villages ou pour le commerce avec les échanges entre personnes. Il existe donc de nombreuses traces et sources documentaires. Certaines sont exposées dans les musées comme le Papyrus de Rhind au British Museum de Londres. Les mathématiciens et les historiens s'intéressent à ces documents car ils ont à la fois un intérêt historique et un intérêt mathématique. Nous allons voir à travers deux ouvrages récents comment les sources historiques peuvent être présentées au public et quels usages on peut en faire, puis en dégager quelques caractéristiques pour l'enseignement.

1. Le document historique

En 1995, une équipe d'enseignants (IREM) publie un ouvrage qui présente une série de sources historiques sur le thème des algorithmes (Chabert & al., 1995). Ce mot vient du nom d'un mathématicien arabe, al-Khwārizmi, qui a écrit le plus ancien traité d'algèbre que nous connaissons. Il date du IX^{ème} siècle. En effet, un algorithme est une méthode systématisée pour obtenir un résultat ; ce doit être un moyen efficace et utilisable plusieurs fois. Il y a l'idée de finitude et de récurrence jusqu'à une limite fixée au départ.

Dans cet écrit, on ne traite que d'algorithmes numériques. Chaque chapitre est organisé autour d'un thème en s'appuyant sur des textes originaux pour montrer les différentes facettes du sujet. Les textes sont en général accompagnés de la transcription et/ou de la traduction. Les documents sont placés dans une perspective historique avec des explications mathématiques. Le but est de « donner un support historique à des pratiques algorithmiques contemporaines » (p. 8) et de mettre l'accent sur « l'introduction historique des techniques développées et sur l'intérêt particulier du texte original afin de mieux saisir l'idée initiale. » (p. 8) pour « donner un éclairage nouveau » (Chabert & al., p. 8).

Par exemple, depuis l'école élémentaire, on effectue des multiplications et des divisions. Ce genre d'opérations remonte à des nécessités économiques très anciennes : le problème du partage. Dans le premier chapitre : « algorithme des opérations arithmétiques » (p. 11-58), on aborde essentiellement ces problèmes de divisions et de multiplications. Le chapitre commence par une introduction générale puis il est divisé en sous-parties placées chronologiquement avec des extraits de documents historiques. Chaque source est accompagnée d'une petite explication sur le système de numération utilisé, son fonctionnement et d'un léger contexte historique pour situer le document et le comprendre. Ensuite, il y a une explicitation du document, comme une aide à l'analyse et à la compréhension (pour les calculs, on a les étapes intermédiaires).

L'ensemble du livre est basé sur ce fonctionnement et chaque chapitre aborde un thème spécifique. Les auteurs essaient de nous montrer que la pensée scientifique n'est pas une progression continue. En effet, ce sont les contacts humains entre groupes ou civilisations qui ont permis le succès d'une méthode au détriment d'une autre. On peut constater que les mathématiques sont liées à l'histoire, et aussi intimement liées à l'évolution des sociétés. Aujourd'hui, elles sont encore présentes ; les algorithmes sont très utilisés par exemple en informatique.

Dans ce livre, on peut remarquer que seul le document historique est important, les auteurs présentent un contexte succinct mais précis, les informations permettent une compréhension minimale. Ce livre est destiné à des enseignants en mathématiques, cherchant à compléter leur culture mathématique en comprenant l'origine de certaines techniques.

2. Pistes pour aider l'enseignant

Pour un enseignant de l'école élémentaire, le document historique seul est difficile à utiliser car il n'est pas expert en histoire des mathématiques. L'ouvrage d'Alain Bernard & al. (2010) insère un peu de pédagogie dans son analyse des documents historiques.

Dans l'introduction générale, les auteurs justifient leurs choix et l'intérêt de ce livre et aussi de l'histoire des mathématiques en général. Ils débutent en expliquant que les nombres sont des outils de la pensée scientifique et économique sous l'Antiquité. Ils servaient à la gestion politique des Etats anciens (Egypte, Mésopotamie,...) et étaient un

objet privilégié de la pensée mathématique et philosophique. En effet, à l'époque, les nombres ne sont pas « familiers » ou « naturels », ils sont l'objet d'un apprentissage long. Faire des calculs est quelque chose de coûteux en temps et en signification. On constate de nombreuses erreurs. Aussi tout le monde ne pouvait y avoir accès, cela était réservé aux hautes classes sociales de la société.

Par contre, aujourd'hui, nous sommes saturés de données chiffrées. Effectivement, les nombres ont été « domestiqués » par le développement des mathématiques grâce à la construction de différents types de nombres, à l'appréhension théorique des grandeurs continues. On arrive, dans les années 1970, aux mathématiques modernes avec des structures abstraites et des concepts généraux. De fait, dans les sociétés modernes, les nombres sont partout et sont manipulés par tous (journalistes, politiques, communication,...). Hélas, tout le monde n'en comprend pas forcément le sens. C'est, entre autres, à l'enseignant de les rendre accessibles et explicites par une éducation précoce et adaptée à l'environnement qui entoure l'enfant.

Pour cela, selon les auteurs, on doit comprendre les aspects techniques, scientifiques, culturels, politiques et éthiques de la société. Ainsi, on pourra mieux appréhender les nombres et le monde qui nous entoure. En développant une approche culturelle et historique, on obtient une distance critique nécessaire. L'approche par le passé permet de comprendre l'espace qui nous entoure car nous ne l'avons pas choisi. Et comprendre le sens des nombres, c'est étudier la constitution historique de leur signification dans différents contextes culturels. Pour permettre cette appréhension de la réalité, il existe des outils concrets et des concepts abstraits : on parle de modélisation, démarche scientifique pour élaborer un outil conceptuel. Avec les élèves, on peut travailler sur le sens des nombres en les faisant réfléchir à leurs formations, à partir de situations dans lesquelles les élèves doivent faire appel aux nombres par un choix conscient. Enfin, pour les auteurs, étudier les documents du passé revient à une interdisciplinarité car par le passé, les contextes étaient confondus. Il faut comprendre l'ensemble pour comprendre une notion.

Dans l'ensemble de l'ouvrage, les mathématiciens utilisent des sources historiques. Elles sont présentées dans leur version originale (photo de l'extrait), puis on trouve la transcription et la traduction. Dans le cas de textes, seulement la traduction est présente. Chaque document a son chapitre dans lequel on a en général un commentaire historique

et un commentaire pédagogique. Le commentaire historique est plus complet que dans l'ouvrage de Chabert & al. (1995). Il donne un contexte plus large, des détails biographiques sur l'auteur, une présentation du milieu socioculturel. Les auteurs y donnent aussi l'utilité du texte. Pour un enseignant, cet ouvrage est accessible car tout est donné et explicité clairement ; on n'a pas besoin d'aller chercher d'informations complémentaires sur le plan historique.

Puis dans le commentaire pédagogique, l'utilité du texte est reprise mais davantage dans le cadre de l'enseignement. On y explicite aussi de possibles utilisations avec des élèves, les limites du texte et les éventuelles difficultés. Dans cette partie, les différents usages des nombres sont développés. Effectivement, pour les élèves, les nombres sont présents dans l'énoncé d'un problème (la tâche à accomplir), dans la résolution ou le raisonnement pour une utilisation pertinente de l'énoncé (les étapes) et, dans les calculs. L'élève doit faire des va-et-vient entre ces différents registres. Le moment du raisonnement est délicat car l'élève doit faire les distinctions entre la mesure (l'action), les grandeurs et quantités que l'on mesure, l'unité de mesure ou l'étalon et, les valeurs numériques assignées aux grandeurs. Du ce fait, lors de la résolution de problèmes, on a une phase purement calculatoire, où les mesures et les unités n'interviennent pas. Le calcul est hors du contexte, on parle d'une phase d'abstraction car on est dans un contexte algorithmique. Puis, il y a une phase où l'on comprend le sens du calcul, c'est l'interprétation. Ces différents points sont repris et explicités dans les commentaires pédagogiques.

Les deux commentaires permettent une compréhension globale des textes historiques. Ils peuvent être utilisés par des enseignants dès l'école élémentaire comme par exemple le document sur la résolution d'un problème de fabrication de briques (Bernard & al., 2010, p.79-85). L'apparition de l'aspect pédagogique permet de donner un sens plus concret aux nombres et à leurs origines. Nous n'avons pas que des problèmes purement mathématiques, mais pour l'ensemble des documents, on constate des contextes pratiques, on veut résoudre un problème concret et réel. La volonté des auteurs est de montrer l'interdisciplinarité des mathématiques au lecteur, de donner du sens aux nombres.

3. Les caractéristiques du support historique mathématique

Le support historique présente par lui-même un intérêt pour l'étude des évolutions des sociétés ; c'est-à-dire pour l'histoire de l'humanité. Le document historique mathématique se situe dans le même contexte mais présente également un intérêt pour la science mathématique. On constate que de nombreuses traces et de nombreux documents allient à la fois le côté historique et le côté mathématique.

Les documents historiques mathématiques montrent les évolutions des sociétés humaines. Grâce à leurs analyses, les historiens et les mathématiciens tentent de comprendre les civilisations anciennes pour mieux appréhender le monde d'aujourd'hui. En effet, les mathématiques ont évolué selon une certaine direction car les contacts entre civilisations ou les différentes dominations ont permis l'évolution que nous connaissons. Certains chercheurs s'interrogent sur les choix fait à l'époque. Il ne faut pas oublier que les mathématiques étaient réservées à l'élite et très fortement liées à l'économie.

Pour travailler ces supports, il est important d'avoir des textes originaux, ou leurs facsimilés, pour garder la dimension historique, puis de les accompagner de leur traduction et/ou adaptation pour les interpréter. Par adaptation, on sous-entend par exemple, des étapes intermédiaires de calcul ou des détails de contexte, pour mieux comprendre le texte original.

De plus, l'interdisciplinarité du support historique n'est pas à négliger. Les documents du passé ont leurs contextes confondus. Il est important d'aborder les supports historiques selon plusieurs approches pour comprendre l'ensemble de la notion, du concept ou de la technique. Ces approches peuvent être culturelles, historiques, mathématiques, physiques, philosophiques, etc. Lors de l'étude des ces supports, l'historien ou le mathématicien doit en tenir compte.

Pour l'enseignant, les supports historiques mathématiques ont de nombreux intérêts. On peut y voir un bénéfice grâce à l'interdisciplinarité de documents car le côté historique doit être pris en compte. L'enseignant peut ainsi faire des liens avec l'histoire mais aussi les sciences en général : on fait donc des mathématiques ou de l'histoire sans

s'en rendre compte. L'enseignant joue sur plusieurs domaines du programme scolaire et, en le soulignant auprès des élèves, il leur montre la complexité du monde et les évolutions de la société.

En montrant ces évolutions, on peut permettre à l'élève de prendre conscience de l'aspect évolutif des sciences et plus précisément des mathématiques. En effet, les mathématiques sont souvent perçues comme un amas de concepts, de notions et de techniques à connaître et à maîtriser. Avec l'utilisation du support historique, on peut créer des liens et donc donner du sens à ces concepts, notions et techniques, en comprenant leurs origines et leurs évolutions dans le temps.

L'approche par le côté historique des mathématiques peut aussi permettre à l'enseignant d'avoir une originalité dans le support d'étude. Les élèves ont l'habitude de découvrir une notion puis de la travailler en s'entraînant. En leur présentant le document historique, les élèves se retrouvent face à quelque chose d'original qui peut susciter un intérêt pour la tâche plus importante et une meilleure entrée dans l'activité.

A travers la présentation des deux ouvrages, des caractéristiques de support historique mathématique ont été dégagées du point de vue de l'objet en lui-même et de celui d'une future utilisation pour l'enseignant. On peut constater que le document historique est souvent accompagné d'un contexte plus ou moins important et d'une analyse, même succincte, quelque soit le public visé.

II. Des situations-problèmes vers l'histoire des mathématiques

On vient de voir que l'élève à travers le document historique mathématique, peut donner du sens aux nombres qui l'entourent. Or, les nombres sont très présents dans la vie de l'élève et peuvent perdre de leurs sens. À l'école élémentaire, la notation utilise les nombres, et son sens est souvent perçu par les élèves ou les parents comme un moyen de valorisation ; on catalogue les enfants. Odette Bassis (2003) aborde ce sujet en rappelant que le but de l'école n'est pas la note et la valorisation mais davantage la construction de l'avenir des élèves en les faisant devenir acteurs de leurs savoirs, en les construisant. Pour cela, elle propose la pratique de la situation-problème. Mais revenons d'abord à la définition de la situation-problème selon Guy Brousseau puis celle qu'Odette Bassis (2003) utilise.

1. Définition selon Guy Brousseau

Au cours de sa carrière d'enseignant-chercheur (émérite), Professeur des Universités, Guy Brousseau (1998) s'intéresse à l'enseignement des mathématiques. Au début, il travaille seul par l'observation de ses élèves puis, grâce à la formation universitaire, il développe la théorie des situations didactiques. Il parle de situation fondamentale. Elle doit être adidactique, c'est-à-dire sans que la connaissance soit apparente pour l'élève. Ce dernier doit pouvoir dépasser un obstacle et entrer dans la tâche sans difficulté. La situation est telle que l'élève peut agir en autonomie avec le milieu. Il y a une rétroaction possible et une auto-validation.

Avec ce dispositif, G. Brousseau privilégie l'apprentissage de la connaissance à acquérir et la recherche d'une situation qui permette à l'élève de construire sa connaissance. L'auteur se place dans une démarche constructiviste du savoir. L'enseignant n'intervient pas directement, il apporte la situation, la gère, l'étaye.

Lorsque l'élève est dans une situation fondamentale, il est en situation d'apprentissage. On distingue en général quatre phases, c'est le processus dialectique.

En premier, on a la dialectique de l'action où l'élève se retrouve face à un problème dont la meilleure solution est la notion à acquérir. L'élève peut agir avec le milieu et dans une bonne situation, l'élève est capable de juger lui-même du bon résultat et de l'ajuster sans l'intervention de l'enseignant. Puis, la dialectique de l'information est le moment où l'élève communique sa démarche, son idée. Il échange avec ses pairs de façon intelligible ; le message doit être en langage mathématique si possible. La dialectique de la validation utilise les échanges précédents pour former une preuve ou une démonstration qui justifie les choix de l'élève. En classe, on a une dernière phase qui est la dialectique d'institutionnalisation pour valider la nouvelle connaissance et s'entraîner avec des exercices.

Les situations-problèmes, selon les différents auteurs (Douady, Peltier, Charnay, etc), suivent en général le même schéma avec une entrée dans l'activité plus ou moins explicite où l'élève se retrouve face à un problème, ensuite on a une phase de recherche où l'élève interagit avec le milieu ou ses pairs. Après, on trouve un moment où les élèves explicitent leur démarche suivi d'une institutionnalisation. Dans toutes ces démarches, l'enseignant n'est là que pour accompagner, il ne présente pas le savoir dans un rapport direct avec l'élève.

Voyons ce qu'Odette Bassis (2003) propose et décrit à partir de ses concepts généraux.

2. La situation-problème selon O. Bassis

L'élève est à l'école pour apprendre, on le met en situation d'apprentissage. La situation-problème en est une. Elle consiste à placer les élèves face à un problème où la réponse nécessite une réflexion de l'élève, il doit franchir une difficulté pour construire une nouvelle notion. O. Bassis pense que ces situations doivent « inciter et développer une activité de recherche des élèves pour qu'ils élaborent des notions clés en mathématiques. » (p. 5) ; c'est-à-dire qu'ils doivent construire leurs savoirs à partir de savoirs déjà existants. Le but de son ouvrage est de dégager ce qu'il y a à savoir et ce qu'il y a à comprendre pour savoir. De fait, l'élève puise dans ses acquis antérieurs et dans son potentiel créatif pour inventer de nouveaux schèmes de pensée et donc de nouveaux concepts.

La position de l'enseignant, quant à lui, doit aussi être différente dans le cas de cet apprentissage. Il n'est plus dans le transmissif, il doit se défaire des résultats ou des procédures à apprendre par cœur et du point de vue pragmatique et fermé. Il doit concevoir de nouveaux contenus, d'une autre façon, et mener sa classe différemment. On rend les savoirs construits plus fonctionnels et avec davantage de sens. L'enseignant doit ouvrir de nouveaux possibles dans sa vision du métier, la dimension éducative reprend tout son sens : on parle de démarche « d'auto-socio-construction ».

L'élève travaille en général en autonomie, avec les autres élèves en échangeant et en collaborant. Il doit se décentrer de son point de vue pour entrer dans d'autres schèmes représentatifs. O. Bassis conseille d'aller étape par étape dans la conceptualisation. En effet, elle constate que chaque année, les élèves ont un temps de révision des notions sans cesse croissant avec la répétition des règles d'usage et une mauvaise maîtrise de principe de base comme, par exemple, la numération. Si l'on fait un travail pas à pas avec l'élève, celui-ci découvre de nouveaux savoirs, se découvre capable de faire et de penser : il se découvre capable d'apprendre. Elle pense que l'enfant se construit ainsi une meilleure image de lui-même.

Cette démarche pédagogique consiste à établir une relation vivante et inventive entre l'élève et le savoir : « l'acte d'apprendre, de savoir peut devenir une aventure » (p.18). Elle décrit son ouvrage comme une utopie concrète car ses démarches sont possibles et participent à « l'avenir de l'humain » (p. 10).

La définition donnée par Guy Brousseau est très théorique, celle d'Odette Bassis paraît plus concrète. En effet, dans notre cas d'utilisation de supports historiques mathématiques, l'aspect adidactique imposé par la situation fondamentale de G. Brousseau ne semble pas être réalisable. Nous choisirons donc une approche comme O. Bassis.

3. Un exemple : la numération

Illustrons cette démarche en revenant sur la numération, longue partie où O. Bassis s'attarde dans son écrit. Elle définit la numération comme un mode d'écriture (le notre est positionnel) à ne pas confondre avec les nombres. C'est un des concept-clés en mathématiques ; la numération est le préliminaire à tout ce qui touche le numérique.

Ainsi, elle estime que dès le début on doit assurer les fondements. Car si cet apprentissage est erroné, les conséquences seront nombreuses. L'élève aura des difficultés avec les techniques opératoires (la gestion de la retenue), ou en calcul mental, par exemples. Pour cela, comme expliqué plus haut, elle conseille de procéder étape par étape en s'assurant que tous les élèves ont bien compris.

Pour commencer, O. Bassis nous explique ses choix pédagogiques et sa méthode. Elle choisit de travailler en base quatre (Le pays de quatre). Notons qu'aujourd'hui le travail sur les bases ne fait pas parti des objectifs des programmes mais reste très utilisé pour comprendre notre système de numération. Auparavant, l'étude des bases consistait à un apprentissage supplémentaire ; alors que là, elle utilise les bases pour faire comprendre à l'élève la numération décimale. Elle souhaite une progression différente où le fait de regrouper se ressent comme une nécessité, c'est un des principes de la numération. De plus, avec la base quatre, on peut compter beaucoup avec peu d'objets. On arrive facilement à des nombres à trois chiffres. L'enseignant sera vigilant dans le choix des nombres ; il vaut mieux éviter la répétition d'un chiffre pour ne pas semer la confusion dans l'esprit de l'élève. Enfin, on peut utiliser un matériel simple, ici des allumettes et des élastiques, pour regrouper et manipuler. La démarche que l'auteure présente est pour le cycle 2 (CP) mais peut tout aussi bien être retravaillée au cycle 3 ou au collège, si on sent des manques chez les élèves. Au cours de cet apprentissage, des documents historiques peuvent être utilisés. Ils sont, selon l'auteur, un excellent moyen de faire entrer les élèves dans l'action. C'est un moyen d'entrer dans la culture et dans l'histoire humaine. C'est notre passé créatif qui a fait notre environnement actuel. Cela permet de donner du sens à ce qui nous entoure.

Sa démarche est composée de neuf étapes : on part d'une situation de découverte avec un problème ouvert et des manipulations. Il y a de nombreuses phases de recherches et de discussions entre élèves. Chaque étape se sert de l'étape précédente pour avancer. On passe d'un message écrit au codage puis à l'écriture chiffrée. Chaque étape est justifiée, pour au final arriver à la base décimale. Dans son ouvrage, tout n'est pas décrit. O. Bassis fait des propositions, ouvre des pistes. Elle donne à chaque fois une consigne de départ pour l'ouverture de l'étape avec une proposition de déroulement. Chaque enseignant doit s'adapter à sa classe et avoir une position en retrait et surtout pas de jugements du type, « c'est bien, c'est faux ». Il peut être le messenger pour

pouvoir observer les démarches et les propositions des élèves, voir leurs avancées. Elle précise également qu'à chaque étape, le temps ne doit pas être limité ; il faut laisser du temps aux élèves pour conceptualiser et faire des liens sur le plan cognitif. Cela permet la construction du savoir, l'enfant a besoin d'un temps de développement. Lors des échanges entre pairs, l'enseignant doit être en retrait, il ne donne jamais son avis, mais il est plutôt dans une position d'effet-miroir où il renvoie l'élève à lui-même. Ce travail de va-et-vient entre dire ce qu'on fait et faire ce qu'on dit augmente la prise de conscience. Il met une distance pour se construire des schèmes de représentation. On parle d'un travail de conscientisation.

Dans ces différentes étapes, les élèves avancent dans la construction de leurs savoirs. Cette progression suit la progression historique de la numération pour donner du sens à cette construction. O. Bassis propose souvent en fin d'étape, des documents historiques utilisables pour faire travailler les élèves. Elle rappelle aussi à l'enseignant les origines des concepts.

La situation-problème semble réunir des pistes de travail intéressantes pour construire les connaissances des élèves. Elle cherche à faire comprendre la notion. Il est capable d'apprendre et cela vient de lui-même et non d'un apport extérieur. On donne ainsi du sens aux mathématiques. Le document historique paraît être aussi une source qui va dans le même sens que la situation-problème car on cherche à expliquer et non pas seulement à donner une information à retenir.

4. Exemples d'utilisation de textes historiques en classes

Nous venons de voir que les situations-problèmes et l'histoire des mathématiques ont des points communs au niveau de leurs intérêts pédagogiques. Dans son apprentissage scolaire l'enfant travaille sur des supports variés et, dans des situations différentes pour se préparer à sa future vie dans la société de demain. Dans deux ouvrages de Françoise Cerquetti-Aberkane et ses collaborateurs (1997 et 2002), nous avons des exemples de pratiques réalisables avec les élèves. Nous allons en donner quelques exemples en restant dans le même thème que précédemment : la numération.

a. La numération et les abaques romains

Selon F. Cerquetti-Aberkane & al. (1997), le travail en situation-problème est un défi posé aux élèves pour élaborer des notions. Dans leur ouvrage, les auteurs abordent trois thèmes : la numération, les opérations et la géométrie. Nous allons présenter ici de manière succincte les propositions de travail sur la numération.

Dans un premier temps, rappelons que l'écriture des nombres a évolué au cours du temps. Nous sommes passés des lettres romaines aux chiffres indo-arabes ; c'est-à-dire d'un système additif à un système de position. Ces deux types de numération ont tout de même un point commun, c'est leur relation avec la base dix. On fait des échanges « 10 pour 1 ». Les abaques permettent la disposition en colonne des nombres. Chaque colonne représente une puissance de dix avec à droite les unités. Les abaques ont permis la transition entre les deux systèmes de numération.

Les abaques sont utilisés à l'école pour redonner du sens à nos écritures numériques actuelles et montrer que le système positionnel permet d'accéder aux très grands nombres. Les auteurs proposent différentes activités avec les abaques romains ou japonais. Chaque activité est présentée sous forme d'une séance avec l'objectif, le niveau, la durée, le matériel et le déroulement. On a une esquisse de fiche de préparation de l'enseignant. Dans la majorité des séances, le support à fournir aux élèves est présenté. On trouve aussi parfois des commentaires des auteurs, des réactions de situations vécues et des productions d'élèves.

Prenons, par exemple, une des activités qui s'intitule 'rechercher des nombres voisins' (Annexe 1). Les élèves ont appris à manipuler l'abaque romain dans les séances précédentes. L'objectif est de faire manipuler les élèves pour comprendre le changement de colonne en ajoutant ou en retirant une unité de cette colonne. Comme, par exemple pour passer de 19 à 20 on doit enlever les neuf unités pour en ajouter une aux dizaines. Les élèves, grâce à la manipulation, peuvent comprendre notre système de numération et son intérêt.

Dans la seconde partie de l'ouvrage sur les opérations, une des activités consiste à effectuer des additions avec ce même abaque (Annexe 2). L'enseignant veut renforcer chez les élèves le complément à 10 et le fait que 10 d'une colonne donne un dans l'autre

et inversement. Sans s'en rendre compte, les élèves abordent la notion de la retenue, comme dans la troisième remarque quand on doit faire le calcul $4+7$. On peut, si les élèves se sentent en difficulté vu la taille des nombres proposés, commencer par des nombres plus petits n'utilisant que deux ou trois colonnes.

Ces manipulations permettent une meilleure prise de conscience de l'élève. Il doit trouver la solution à un problème donné. Il effectue avec l'abaque un va-et-vient qui lui permet de se corriger et de faire évoluer sa stratégie. L'enseignant n'est présent qu'au départ pour donner la consigne. Ces pistes sont intéressantes pour enseigner différemment et permettre à l'élève d'être acteur.

b. L'addition au XVIIème siècle

A la Renaissance, de nouvelles techniques de calculs vont se développer ; on passe de l'abaque du Moyen-Âge au procédé de calcul appelé algorithme. En 2002, F. Cerquetti-Aberkane et A. Rodriguez proposent une séquence sur l'addition au XVIIème siècle (extraits annexe 3 : documents 1, 2 et 3) destiné à des élèves de cycle 3 (CE2), dans le cadre d'une remédiation. On espère intéresser les élèves grâce à l'originalité du support, ils vont travailler sur une addition sans retenue (document 1) puis deux avec retenues (documents 2 et 3).

Dans l'ouvrage, nous avons tout d'abord une présentation des documents destinée à éclairer l'enseignant et à présenter un petit contexte historique. Ensuite, les auteurs proposent une exploitation de ces documents en décomposant la séquence en trois temps : l'exploration, l'approfondissement et le réinvestissement.

Pour la phase d'exploration, tout d'abord l'élève ne possède que les additions des documents 1 et 2, sans le texte. L'enseignant met les élèves en phase de recherche. Ils doivent trouver l'opération et expliciter sa structure. Les auteurs signalent que lors de l'expérimentation en classe, les élèves se sont montrés intéressés et appliqués au niveau du vocabulaire.

Pour l'étape d'approfondissement, les auteurs proposent de travailler sur le texte qui accompagne les additions. Les élèves doivent donner les étapes de calculs et comprendre la retenue. Un travail important de l'enseignant doit avoir lieu pendant la mise en commun car il doit s'assurer que tous les élèves ont compris. Cette séance peut

être retravaillée car de nombreux élèves peuvent avoir des difficultés à faire le lien entre le message écrit et le message chiffré.

Pour la dernière étape, celle du réinvestissement, l'enseignant peut fournir un texte et les élèves doivent retrouver l'opération et proposer le document 3 pour que les élèves identifient les erreurs. En général, ces exercices ont du succès. Enfin une évaluation peut avoir lieu pour voir si les élèves ont amélioré leurs techniques opératoires. Les auteurs signalent que lors des pratiques en classe plus de la moitié des élèves ont progressé.

5. Bilan

Dans l'apprentissage des mathématiques, il est recommandé de travailler et d'aborder les notions dans une perspective constructiviste. O. Bassis l'utilise fréquemment pour permettre à l'élève de donner du sens à son savoir. Il se construit lui-même par la construction interne de schèmes représentatifs. Il ne reçoit pas l'information de l'extérieur, elle vient de lui.

De plus, comme dit plus haut, la situation-problème cherche à expliquer ; c'est-à-dire qu'elle apporte une justification, une cohérence à la construction du savoir. L'élève comprend l'utilité de cette nouvelle connaissance qui prend alors pour lui tout son sens.

L'utilisation de textes historiques en classe dans le cadre de situation-problème ou de remédiation permet de faire entrer l'élève plus facilement dans la tâche en utilisant par exemple, l'originalité du support. Selon O. Bassis (2003), l'élève est acteur et en utilisant des supports historiques, il prend part à cette longue construction. L'auteure qualifie les apports historiques de « puissants facteurs d'entrée dans la culture et l'histoire humaine » (p. 9).

Dans les différents exemples, l'élève interagit avec le milieu ; il obtient des réponses et peut aussi manipuler (cas de l'abaque). La manipulation est un moyen d'apprentissage extérieur, avant les constructions internes des schèmes représentatif. L'élève construit son savoir en comprenant le sens mais aussi l'origine des notions. Il comprend aussi sa nécessité et son utilité, il donne du sens aux nombres et opérations qu'il utilise. Précisons que F. Cerquetti-Aberkane & al. (2002) travaillent sur le sens des opérations comme nous l'avons vu précédemment.

Dans tous ces exemples, la situation-problème est un outil pédagogique pour permettre les apprentissages de l'élève. En mathématiques, cette pratique est courante depuis la situation fondamentale de G. Brousseau. Allier cette pratique avec les supports historiques mathématiques paraît recouper les mêmes intentions. En effet, nous avons vu que le support historique permet à l'élève d'entrer dans l'action, il sollicite son intérêt et sa curiosité. Il développe les liens interdisciplinaires qui enrichissent les domaines entre eux et le côté évolutif des sciences. Avec la situation-problème, le support peut être varié mais doit être en lien avec l'apprentissage souhaité ; le support historique peut donc en faire partie et ainsi pousser à l'interdisciplinarité.

Les exemples précédents illustrent les différentes possibilités d'utilisation de textes historiques mathématiques pour l'enseignant. Ce ne sont que des pistes, et il existe de nombreux autres cas. Les situations-problèmes en général sont une des perspectives possibles pour la mise en place d'un travail et d'un apprentissage avec les documents historiques.

III. Les recherches actuelles

L'enseignement des mathématiques utilise les situations-problèmes depuis plusieurs années au sein de l'école pour permettre à l'enfant de se construire et de construire son propre savoir. Aujourd'hui, l'école cherche à instruire le citoyen de demain et donner du sens aux concepts et connaissances enseignés. On cherche aussi l'épanouissement de l'élève. L'enseignement des mathématiques ne semble plus apporter satisfaction aux finalités de l'école et une remise en cause des méthodes paraît nécessaire. Les chercheurs français et mondiaux travaillent dans de nouvelles directions pour mettre en place de nouvelles approches et redonner sens aux mathématiques.

1. Les PER et AER

Les chercheurs français en didactique des mathématiques travaillent en collaboration avec les établissements scolaires pour mettre en œuvre de nouveaux dispositifs, en adéquation avec le contenu des programmes scolaires du ministère de l'éducation nationale. Les travaux de recherches sont menés au sein d'équipes appartenant par exemple, aux Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) ou aux ex Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM).

Depuis une dizaine d'années, des recherches se portent sur la construction de Parcours d'Etudes et de Recherches (PER) et d'Activités d'Etudes et de Recherches (AER) pour dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire.

a. Un constat : la perte du sens des mathématiques enseignées dans le secondaire

L'enseignement des mathématiques dans le secondaire a perdu de son sens : Y. Matheron et R. Noirfalise (2007) en font le constat. Les élèves n'éprouvent plus d'intérêt et de plaisir dans l'enseignement des mathématiques ; leurs intérêts sont

purement scolaires et non culturels. Il semblerait que les lycéens voient dans les sciences et les mathématiques de l'ennui mais y trouvent une nécessité pour réussir dans leur vie professionnelle. De plus, selon les lycéens, les sciences ne permettent pas un éclairage du monde actuel ; elles ne parlent pas de ce qui nous entoure ni de notre environnement. De fait, il y a un « désamour » pour l'étude des mathématiques ; certains parlent de désaffection des filières en France mais aussi dans toute l'Europe.

Un autre point est souligné par les deux auteurs : l'enseignement des mathématiques en lui-même. Tout d'abord, les contenus ne semblent plus d'actualité ou ont perdu de leurs sens ; c'est-à-dire qu'ils ne sont plus en adéquation avec les questions fondamentales d'aujourd'hui. Ensuite, la forme actuelle de l'enseignement provoquerait une perte du sens des mathématiques par les élèves dues à la perte des questions fondatrices ; les activités seraient non significatives et seulement formelles. De plus, la remise en cause est générale car on aborde aussi le découpage horaire, les cloisonnements thématiques et même les méthodes (IREM de Poitiers, 2011).

b. Buts et origines des PER/AER

Face à ce constat alarmant, une remise en question a commencé. Il faut donc redonner du sens aux mathématiques enseignées dans les collèges et les lycées pour pouvoir former le citoyen de demain, pour que l'élève ait une culture pour sa future vie professionnelle et des connaissances adaptées à des situations concrètes (IREM de Poitiers, 2011).

Il faut aussi libérer l'enseignement de certaines contraintes et proposer aux enseignants un processus d'étude des mathématiques d'un nouveau type pour qu'elles prennent plus de sens aux yeux des élèves (Matheron, 2007). C'est l'objectif du groupe AMPERES, un collectif de chercheurs composé d'équipes des IREM et de l'équipe de l'IUFM de Toulouse. La Théorie Anthropologique du didactique (TAD) d'Y. Chevallard permet la classification de ces contraintes et conditions. On a des contraintes issues de la civilisation, de notre histoire, de notre société, de la pédagogie appliquée ou de la discipline elle-même. Les enseignements des mathématiques se retrouvent enfermés et les enseignants ont des difficultés dans l'organisation et l'articulation en thèmes plus larges.

Pour redynamiser, il faut rendre les élèves acteurs en construisant collectivement le savoir, au niveau des collèges et des lycées. Pour cela, les savoirs doivent être moins morcelés, redevenir utiles et entrer dans un thème plus large autour de grandes questions fondatrices. Des dispositifs valides et robustes doivent être conçus, ainsi on pourra refaire vivre le sens. A partir de ces grandes questions, des parcours de recherches peuvent être créés : on parle de PER.

A l'origine de ce concept, nous avons Y. Chevallard (2009). En effet, ce chercheur a fait naître les PER à partir de sa collaboration sur la création des Travaux Personnels Encadrés (TPE) au début des années 2000. Au départ, les TPE sont en lien avec les mathématiques, il parle de « PER codisciplinaire ». Puis face aux difficultés de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire, les « PER monodisciplinaire » apparaissent dès 2003. Les AER étaient déjà existantes en mathématiques et sont associées aux PER. En général, un PER se fonde sur une grande question qui génère de nombreuses sous-questions qui permet de travailler sous forme d'AER.

c. Les dispositifs AER et PER

Les PER et les AER se fondent autour de questions génératrices de sens pour les élèves, ils doivent redonner vie aux classes par l'étude et la construction du savoir par les élèves (Matheron, 2007).

Les PER, selon l'IREM de Poitiers (2011), suivent les contenus du ministère de l'éducation nationale mais proposent une nouvelle organisation sous forme de questionnement et une connexion plus forte entre les notions pour renforcer le sens. Ils proposent une démarche qui revient aux sources dans l'histoire pour retrouver l'intérêt des notions à connaître, qui réfléchit à la fonctionnalité de la notion à travers des types de tâches et des techniques pour résoudre ces différentes activités.

Pour réaliser tout ceci, il faut chercher de grandes questions. Elles ne suivent pas les contenus de manuels qui agissent par juxtaposition mais plutôt par secteurs, domaines de problèmes mathématiques. La grande question à l'origine d'un PER est reliée à la société pour comprendre le monde qui nous entoure, ou aux mathématiques en elles-mêmes pour une vision plus interne liée aux sciences. La grande question génère donc

de nombreuses sous-questions, de nouveaux savoirs et met en valeur les connaissances antérieures.

Les PER apportent donc des réponses aux élèves. Chaque question est traitée sous forme de recherches et d'études, on parle alors d'AER car ceux sont des activités. Ces sous-questions permettent de dynamiser l'apprentissage. Chaque étude introduit des notions nouvelles, en situation concrète si possible et, comme l'élève peut utiliser ses anciennes connaissances, il ne perd pas le sens et garde sa motivation. A l'issue de chaque activité, une synthèse est faite sur les savoirs et savoir-faire construits puis l'enseignant fait « travailler la technique ».

Les AER permettent de structurer un PER, en effet pour réaliser les activités mathématiques des AER, l'enseignant doit appréhender de nouveaux outils didactiques. Dans l'ensemble de l'organisation, le professeur n'est pas maître du savoir, il sert de guide et de gestionnaire du travail des élèves puis il va institutionnaliser le savoir : un peu comme dans une situation-problème (Matheron, 2007). Les PER sont donc des situations issues de la pédagogie constructiviste. Il faut veiller à ce que les activités proposées soient de vrais problèmes pour les élèves avec une réelle phase de recherche. Ces situations sont difficiles à obtenir et, selon l'IREM de Poitier (2011), il faut tenter de se rapprocher le plus possible d'une situation fondamentale de G. Brousseau pour obtenir l'effet attendu. Les mathématiques peuvent ainsi devenir signifiantes.

2. La classification des documents historiques

En France, certaines recherches comme celles des PER et AER sont axées sur les pratiques en classe. On cherche de nouveaux dispositifs pour améliorer les apprentissages des élèves, pour donner du sens aux mathématiques (de manière interne ou externe avec les AER et PER) et pour construire des citoyens capables d'utiliser leurs connaissances. Il existe aussi des recherches empiriques pour encadrer les pratiques. D. Guillemette (2011) et U.T. Jankvist (2009) sont deux chercheurs, respectivement canadien et danois, qui travaillent sur l'utilisation des documents historiques dans l'enseignement des mathématiques.

Depuis quelques années, des recherches empiriques sur l'utilisation des sources historiques pour l'enseignement des mathématiques sont apparues. En effet, il existe de

nombreuses interrogations sur l'efficacité et la pertinence de cette utilisation. Des classements sont alors faits par des chercheurs selon des points de vues très distincts, avec pour chaque classement ses avantages et ses inconvénients. Nous allons expliciter une des plus récentes, celle du danois U.T. Jankvist, en utilisant les termes traduits par D. Guillemette.

a. Les différents « pourquoi »

Pour classer les activités pédagogiques, depuis les années 2000, les chercheurs comme Jankvist utilisent deux grandes catégories : le « pourquoi » et le « comment ». Commençons par expliciter le « pourquoi ». Il représente l'ensemble des arguments qui justifie l'utilisation d'une méthode. Il y a deux grands types d'arguments :

- La perception de l'histoire comme un outil :

Cet argument concerne les manières dont un étudiant peut apprendre et comment l'enseignant utilise cet argument pour mettre en action l'étudiant. On distingue différents aspects :

- le rôle motivant du support. Le document peut susciter l'intérêt de l'étudiant.
- le développement du côté humain des mathématiques en les rendant moins troubles, moins opaques.
- le rôle d'outil cognitif car on utilise un nouveau point de vue.
- la possible identification épistémologique des obstacles. Les obstacles rencontrés par les étudiants peuvent parfois être les mêmes que ceux rencontrés au cours de l'histoire. Par une réflexion épistémologique, on peut s'enrichir et trouver la clé, la solution à l'obstacle.
- le rôle « évolutionniste ». Il ne peut y avoir d'apprentissage mathématique sans histoire. Par exemple, pour une notion particulière, il y a un développement propre à cette notion : c'est son histoire.

- L'histoire comme un objectif en soi :

Dans ce cas, l'histoire des mathématiques sert à comprendre les mathématiques en elles-mêmes : l'aspect en mouvement des sciences. Les mathématiques évoluent dans le

temps et s'appliquent dans l'espace ; On peut montrer aux étudiants les évolutions liées aux différentes activités humaines, aux sociétés et cultures passées. Ces évolutions sont influencées par des motivations passées à la fois intrinsèques et extrinsèques.

Lors de l'utilisation de l'histoire comme un outil ou comme un objectif en soi, l'enseignant n'a pas les mêmes buts pédagogiques en général. Pour le cas de l'histoire comme outil, on se place au sein des mathématiques, c'est-à-dire que l'on utilise l'histoire pour comprendre les mécanismes : l'objet mathématique, par exemple, les notions, les concepts, les méthodes, les théories, etc. Pour le cas de l'histoire comme objectif en soi, il y a un renvoi à l'aspect métamathématique. Dans ce cas, c'est souvent le côté évolutif du thème à travers le temps, les circonstances de l'évolution, ...

b. Les différents « comment »

Les « pourquoi » sont des justifications de l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Jankvist (2009) donne une autre distinction : les « comment ». Ce sont les méthodes utilisées par les enseignants pour transmettre les savoirs ; le danois en dénombre trois :

- L'approche par anecdotes :

La méthode correspond à un saupoudrage d'histoire à la fin d'un chapitre ; dans de nombreux manuels ce principe est utilisé. Cette touche est de deux sortes :

- le fait isolé ou le fragment d'histoire : on a juste quelques bribes d'informations comme des noms de mathématiciens, de grands événements ou des problèmes connus. L'auteur parle « d'épices ».
- l'épilogue historique : dans ce cas, le texte est un peu plus long à la fin du chapitre ; parfois il peut y avoir des sources originales sous forme d'extraits.

- L'approche par modules d'apprentissage :

Cette pratique est la plus répandue, elle se présente sous forme de séquences d'enseignement plus ou moins longue avec parfois l'utilisation de situations-problèmes, au sens de Brousseau ou de façon plus large. Le thème est basé sur l'histoire autour d'un

sujet mathématique précis, avec l'utilisation de sources historiques primaires ou secondaires. On en distingue trois catégories :

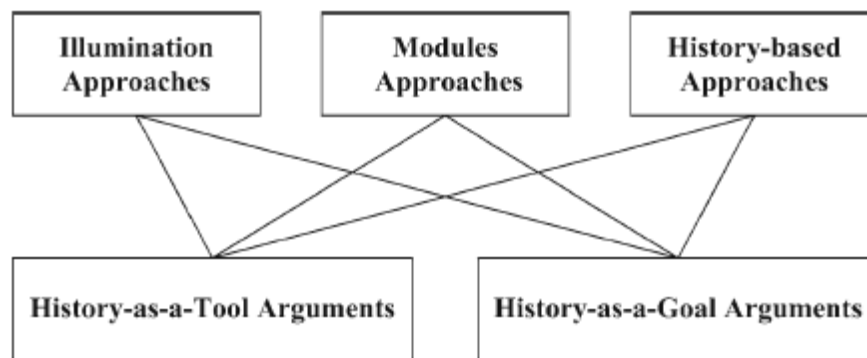
- le « pack historique » : c'est un petit sujet sur deux ou trois séances où les enseignants ont des kits prêt à l'emploi pour leur classe.
- le cours de taille moyenne : sur dix à vingt séances, un sujet mathématique est traité, souvent sous forme de projet. Cet enseignement, dans de nombreux cas, ne fait pas parti des programmes de l'école.
- la séquence complète : l'histoire des mathématiques est le sujet du cours : c'est un des objectifs. On y développe des concepts sous l'angle historique à partir des données d'époque avec des documents originaux ou secondaires. Les supports doivent être choisis avec précaution par l'enseignant car il faut tenir compte du niveau des étudiants.

- L'approche historique intégrée :

Ici, la séquence d'enseignement est complète et se base sur les développements historiques de l'objet mathématique, comme l'évolution et la construction des nombres. Durant cet enseignement, des questions peuvent être soulevées à partir du contexte historique ou de l'enchaînement des concepts. L'histoire est de façon directe ou indirecte au cœur de la classe, tout dépend des stratégies adoptées par le professeur. Dans cette approche, on retrouve des pratiques connues comme des approches « génétiques ».

c. Les interrelations « pourquoi »/ « comment »

Chaque utilisation de l'histoire dans le cadre de l'enseignement des mathématiques peut être analysée avec les deux critères d'U.T. Jankvist (2009) : le « pourquoi » et le « comment ». Les deux catégories sont liées entre elles. Voici le schéma que dresse l'auteur dans son article :



(Jankvist, 2009, p. 251)

On remarque qu'il y a six interconnexions possibles entre les deux catégories.

Pour l'approche par anecdotes, utiliser l'histoire comme un objectif en soi semble difficile car on ne peut approfondir une idée. En effet, avec une anecdote on n'a que peu de possibilités de réflexions métamathématiques, sauf dans le cas d'un épilogue historique bien précis et bien construit. En général, l'approche par anecdotes se sert de l'argument de l'histoire comme un outil car on est davantage sur le plan de la motivation de l'étudiant, on cherche à l'intéresser, à lui apporter une petite touche « épicée ». Pour les autres aspects de l'histoire comme un outil ; c'est-à-dire, le rôle cognitif, évolutionniste, cette approche ne semble pas être la plus appropriée.

L'approche par modules utilise l'histoire comme un outil en se servant de l'argument cognitif plutôt que de la motivation, car il est plus efficace pour l'apprentissage d'objets mathématiques. Les modules sont aussi exploités pour mettre en valeur les différentes réflexions métamathématiques du développement de cette science, sous la forme de cours de taille moyenne ou de cours complet.

Les sources primaires doivent jouer un rôle important lors de la fabrication et la mise en pratique des modules car elles peuvent être à la fois support-outil et support de l'histoire comme un objectif en soi. Effectivement, les sources primaires permettent de montrer l'évolution de la résolution mathématique et pas seulement une technique isolée (le résultat), elles peuvent rendre des objets non familiers plus familiers et, permettent le développement des mathématiques au sein de la science en général au niveau de l'espace et du temps. Egalement dans les modules, on peut trouver le rôle évolutionniste

sous la forme de la classe de taille moyenne au cours complet ; même si cet aspect est mieux utilisé sous la forme de l'histoire intégrée.

Pour l'approche historique intégrée, l'objet mathématique semble être un objet d'étude intéressant car on peut apprendre facilement les mathématiques et l'histoire s'exploite d'elle-même comme un outil. L'aspect génétique ; c'est-à-dire les origines et l'évolution des mathématiques sont en forte connexion avec l'objet mathématique en lui-même.

Ainsi, les interrelations entre les « pourquoi » et les « comment » semblent être difficiles à distinguer. On remarque que pour les différentes méthodes, on peut, selon le point de vue, avoir des arguments différents, surtout dans l'approche par module. C'est l'avis de l'enseignant qui fait la différence, car c'est lui qui détermine son objectif et ce qu'il veut enseigner, et donc quelle démarche il souhaite associée à son objectif.

d. Critiques

Malgré ces difficultés de classement, la construction d'outils critiques est nécessaire pour avoir un regard plus aiguisé sur la recherche actuelle (Guillemette, 2011). Selon le québécois, la catégorisation en « pourquoi » et « comment » peut faciliter l'observation et l'analyse de ce qui se fait comme utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

Les deux auteurs, Jankvist (2009) et Guillemette (2011), se rejoignent sur le fait qu'il y a de nombreuses critiques et appréhensions sur l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. D'un point de vue général, il peut y avoir un rejet de l'histoire en tant que telle ou ne la présenter que sous forme d'option car on manque de temps, de ressources ou d'expertise pour l'utiliser (Jankvist, 2009). Guillemette ajoute que l'histoire est souvent mal traitée en classe pour les mêmes raisons que le danois mais aussi que l'histoire sert d'écran devant les mathématiques et ne peut donc être prise au sérieux (2011).

Il faudrait donc aider l'enseignant et l'étudiant à créer un va-et-vient entre les deux disciplines, l'histoire des mathématiques et les mathématiques, pour faire émerger une conscience de nouvelles conceptions possibles et avoir une réflexion plus profonde sur les mathématiques (l'objet ou le *méta*). Les réticences des enseignants sont d'ordre

méthodologique car ils ne se sentent pas suffisamment formés pour appréhender ce type de situations (Guillemette, 2011).

Selon Guillemette, l'ensemble des études sur l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques montre un cadre méthodologique trop faible pour obtenir une analyse et une conclusion fiable. Souvent le cadre final est trop éloigné du cadre de départ, les descriptions des milieux sont trop succinctes ou voir même absentes et les outils de collecte de données sont imprécis. Seul Jankvist, selon le canadien, produit un cadre cohérent avec sa conclusion car il a triangularisé les résultats.

Pour résoudre ces difficultés d'ordre méthodologique, il faut construire des bases plus solides et ne pas toujours vouloir faire de l'histoire comme un objectif en soi. Les outils doivent être nombreux et variés pour effectuer une recherche qualitative et interprétative. Pour cela, selon Guillemette, il faut resituer l'introduction de l'histoire dans l'apprentissage des mathématiques au sein de la didactique des mathématiques et plus globalement dans les sciences de l'éducation. Effectivement, on pourra ainsi utiliser les outils et les cadres méthodologiques des sciences de l'éducation pour construire une méthodologie (2011).

3. Synthèse et perspectives

Suite à ces différentes lectures sur les PER/AER et l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, il semble que quelques points soient à souligner et à mettre en relation avec les descriptions du support historique mathématique et des dispositifs de situations-problèmes présentés précédemment.

Tout d'abord, On peut remarquer que les AER développées pour l'enseignement secondaire ont de nombreux points communs avec la situation-problème mise en place à l'école élémentaire. En effet dans les deux cas, l'élève peut entrer dans la tâche grâce à ses anciennes connaissances ; il obtient des réponses par son action sur le milieu, il y a des interactions ; il construit lui-même son nouveau savoir par des phases de recherche. Pour l'enseignant, il est dans la même position dans les deux activités, il propose une situation à l'élève, la gère, l'anime mais jamais ne transmet le savoir directement de façon transmissive. Il doit s'adapter aux propositions des élèves.

La pratique des PER et des AER doit donc se situer dans un cadre méthodologique très précis pour éviter à l'enseignant des difficultés inutiles ou, de se retrouver face à de nouvelles questions qui ne soient pas adaptées ou ne fassent pas parties des contenus des programmes du niveau de la classe. C'est pourquoi les chercheurs recommandent aussi de se placer dans de « vraies » situations-problèmes avec des « vraies » questions génératrices de nouveaux savoirs comme la situation fondamentale de Brousseau. De plus, comme l'ont souligné Jankvist et Guillemette, il est important d'avoir un cadre méthodologique fort pour permettre une meilleure analyse qualitative.

On a vu que les supports historiques mathématiques peuvent permettre d'entrer dans l'activité, de susciter l'intérêt de l'élève, de donner du sens et d'être en lien avec d'autres disciplines grâce à l'interdisciplinarité du support. De plus, l'histoire des mathématiques permet de comprendre l'origine et l'évolution des notions et de construire le citoyen. Or les PER et les AER ont les mêmes buts : redonner du sens aux mathématiques en les rendant par exemple plus concrètes ; il pourrait donc être intéressant de baser un PER ou une AER sur des documents historiques. Il faudrait bien sûr veiller au choix des documents et des objectifs.

Il semble se dégager une perspective intéressante de travail : la création d'un PER ou d'une AER pour l'école élémentaire à partir de documents historiques mathématiques. Pour cela, il faut trouver de bons supports, capables de générer des questionnements aux niveaux des élèves, puis chercher une mise en pratique susceptible de faire émerger une nouvelle notion ou de remédier aux difficultés des élèves. L'analyse de cette pratique doit se faire en utilisant la classification de Jankvist (2009), selon les deux grandes catégories : « pourquoi » et « comment ». Et comme le soulignait Guillemette (2011), en veillant à ne pas dévier du cadre et penser à trouver de nombreux outils de collecte de données pour obtenir des résultats constructifs aux niveaux des élèves et au niveau de l'analyse qualitative et de l'interprétation.

Au niveau de la pratique dans le cadre du mémoire, ce projet paraît très ambitieux. On proposera deux activités autour de la multiplication. Ces activités se présentent sous forme de kit « clé en main » pour l'enseignant. Nous les analyserons selon les critères de Jankvist (2009).

2^{ème} partie :

Expérimentation et

pratique

I. Multiplication « per gelosia »

Depuis le début, notre choix de thématique s'est porté sur la numération. Les deux supports historiques mathématiques que nous avons choisis de travailler sont donc dans ce champ. Nous nous intéressons plus précisément à la multiplication en sélectionnant un texte du Moyen Âge et un outil de la Renaissance. Les documents ont été choisis dans l'ouvrage de Robert Charbonnier, *Si les nombres m'étaient contés...* (2002). On y retrouve un ensemble de documents historiques mathématiques, issus de sources primaires ou secondaires.

1. Présentation du texte historique

Ce texte (Annexe 4, document 1) est une traduction de l'arabe au français, du XIX^e siècle. Il explique la technique de la multiplication « per gelosia ». J'ai choisi ce support car c'est le seul document traduit en français ; les autres sont en arabe, latin ou italien. De plus, on rencontre souvent des exemples présentés sur le fonctionnement du tableau mais l'approche avec la construction me semble plus intéressante à exploiter avec les élèves. La traduction française n'est pas récente, elle date du XIX^e siècle, ce qui fait de ce document une source secondaire.

a. La multiplication « per gelosia »

Ce texte décrit la méthode de calcul de la multiplication « per gelosia » (Charbonnier, 2002). Cette opération a été pratiquée durant tout le Moyen-Âge un peu partout dans le monde, par les Indiens, les Arabes, les Chinois et les Européens. Il en existe plusieurs formes qui reprennent le même principe de base avec plusieurs noms comme la méthode du tableau ou du réseau, la méthode par grillage ou par filets.

Le nom de « per gelosia » vient de l'italien et signifie jalousie. Au Moyen-Âge, les femmes se cachaient derrière des panneaux de bois percés. Cela leur permettait de voir sans être vues.

L'opération en soi, consiste à multiplier deux nombres en décomposant dans chaque case du tableau le calcul et les diagonales permettent d'obtenir les différentes puissances de dix.

b. Analyse du texte

Maintenant que le cadre général de la multiplication « per gelosia » est posé ; entrons dans les détails du texte choisi.

Commençons par la forme du texte. Il se présente d'un seul bloc, il y a un seul alinéa, celui du début du paragraphe. Puis à la suite de ces explications, un tableau servant d'illustration aux propos est présent. On peut remarquer que l'extrait est introduit par le mot « mais ». Il sert de connecteur logique avec le paragraphe précédent, présentant sûrement une autre méthode de calcul de multiplication. Ce terme renforce l'idée que la méthode « per gelosia » est la plus adaptée selon l'auteur pour la multiplication de nombres à plusieurs chiffres.

Dans cet extrait, on remarque que l'auteur est familier avec son lecteur car il utilise le tutoiement et l'impératif à la seconde personne. On peut supposer que l'écrivain arabe destinait son écrit à un de ses élèves ou que l'écrivain traducteur du XIX^e siècle, le destinait à ses élèves à lui.

Au niveau du vocabulaire, il n'y a aucune difficulté. Les termes utilisés sont les mêmes que ceux que nous utilisons aujourd'hui en géométrie et en calcul. Seule la tournure « nombre composé » peut interroger. On comprend en lisant le texte, que l'on désigne par ces mots un nombre contenant plusieurs chiffres.

La structure du texte est formée de longues phrases contenant des connecteurs logiques. Cette organisation permet au lecteur de suivre de façon aisée les étapes de construction du tableau puis de calcul. On remarque aussi que l'auteur du texte souhaite faciliter le calcul car il lui propose de laisser les cases vides au lieu de mettre des zéros. Cela permet sans doute d'alléger la mise en forme du tableau et de le rendre plus lisible.

Dans l'ensemble ce texte explique de façon claire et précise la mise en œuvre de la multiplication « per gelosia » et sa résolution. On a ici la présentation d'une méthode, sous forme très méthodique, un peu comme un algorithme ; mais à aucun moment cette utilisation n'est justifiée ou expliquée d'un point de vue mathématique.

2. Pistes d'exploitation

Voici quelques pistes de travail éventuel au sein d'une classe de cycle 3 car la multiplication de deux nombres à plus d'un chiffre fait partie des programmes officiels. Ce texte peut s'aborder dans un cadre pluridisciplinaire ou seulement dans le domaine des mathématiques. C'est à l'enseignant de réaliser ce choix selon les objectifs qu'il vise.

a. En mathématique

On travaille bien évidemment la technique de la multiplication. Ce texte peut servir d'outil lors d'une remédiation. Il peut également être utilisé pour impliquer les élèves différemment et permettre à certains de se sentir plus en confiance car l'outil mathématique n'est pas visible au premier abord.

Ce texte présente des liens avec la géométrie car il explicite la construction du tableau. Une première lecture peut être faite par exemple sans le tableau final du texte et laisser les élèves le construire en cherchant les indices dans le texte. Il permet donc de réinvestir le vocabulaire acquis puis les techniques de constructions de figures simples.

b. En français

Dans ce domaine, on peut distinguer différentes activités comme la compréhension du texte en lui-même avec une lecture précise ou un retour en étude de la langue sur l'impératif, temps utilisé dans ce texte. Si on travaille avec ce domaine, les mathématiques sont alors support d'une activité sur la langue. On est de ce fait dans l'interdisciplinarité.

c. En histoire

Pour aider à comprendre le texte, il semble intéressant de le replacer aussi dans un contexte historique. Ce texte est en lien avec l'ouverture culturelle ou les sciences en changement, par exemple. Les élèves peuvent le replacer sur une frise chronologique.

On peut aussi l'aborder en tant qu'élève-historien avec l'intérêt de la traduction d'un texte, de l'apport à la culture d'un pays, ainsi que la notion de source primaire et secondaire.

3. Analyse du fascicule selon les critères de Jankvist

A la suite de ces différentes perspectives, nous allons analyser les propositions de mises en œuvre faites dans le fascicule (Annexe 4, document 2). Les critères décrits par Jankvist sont ceux que nous allons utiliser.

Rappelons que Jankvist classe les activités selon deux critères : le « pourquoi » et le « comment ». Tout d'abord, plaçons-nous au niveau du « comment ». Il s'agit de distinguer la méthode utilisée pour l'activité. Ici, nous sommes dans une approche par modules d'apprentissage, et plus précisément dans le « pack historique » ; car l'activité correspond à une ou plusieurs séances. L'enseignant est guidé par une proposition et l'élève et plutôt dans un rôle actif, proche d'une situation-problème.

Au niveau du « pourquoi », l'histoire est utilisée comme un outil pour l'aspect motivant, le rôle cognitif car elle permet une approche différente de la multiplication. En effet, part une vision différente de la situation, on renforce les schèmes représentation et on consolide les savoirs. De plus cette activité intervient en remédiation pendant l'apprentissage de la multiplication au cycle 3.

II. Baguettes de Roussain

1. Présentation des baguettes

Les baguettes de Roussain (1738) sont un outil de calcul, elles sont une des variantes des baguettes de Neper. Elles sont plus faciles d'utilisation, de lecture et de manipulation car elles s'emboîtent plus facilement. Elles ont été présentées à l'Académie des Sciences de Paris dont le texte figure en annexe 5, document 1.

Cet outil est coloré selon le descriptif de l'Académie des Sciences et permet une utilisation plus « commode et simple ». Selon les académiciens, les baguettes facilitent davantage le calcul que les bâtons de Neper par leur positionnement en vertical plutôt qu'en diagonal, et évitent les erreurs de calculs.

Ce document historique présente un court texte descriptif et un dessin des baguettes qui permet de les visualiser. Il est extrait de *Si les nombres m'étaient contés... Une exploration des opérations arithmétiques dans les documents originaux* de Charbonnier.

Le texte paraît être un commentaire d'un membre de l'Académie des sciences sur le travail de Mr Roussain. Cette observation est positive et montre l'intérêt suscité à l'époque. La description succincte de l'objet suivi du dessin nous permet de l'imaginer assez facilement.

Néanmoins, on peut noter que cette courte description ne nous permet pas de connaître le matériau dans lequel on était réalisé ces baguettes. On peut supposer que c'est du bois peint comme celle de Neper.

L'emboîtement des réglettes est facile et peut donc être facilement réalisé par des enfants. On peut travailler sur le calcul d'un nombre à plusieurs chiffres par un nombre à un seul chiffre.

2. Pistes d'exploitation

Ces baguettes ont été des outils d'aide au calcul à l'époque de leur création. Il peut être intéressant d'effectuer le même travail avec les élèves. Effectivement, elles permettent de vérifier des calculs lors d'une multiplication de deux nombres qu'ils soient à un ou plusieurs chiffres. Car on peut vérifier les calculs intermédiaires plus rapidement.

On peut donc proposer aux élèves de créer ces baguettes puis de travailler sur la notion d'outil et d'aide. On peut par exemple les utiliser à la place de la calculatrice.

Bien sûr, on peut faire un lien important avec les outils dans l'histoire, chercher le contexte historique de l'objet et revenir sur Neper.

3. Analyse du fascicule selon les critères de Jankvist

Je propose d'analyser ce document comme pour le texte historique mathématique sur la multiplication « per gelosia ». Le but du kit d'activité destiné à l'enseignant est de proposer des activités en lien avec les baguettes comme par exemple : faire chercher aux élèves le fonctionnement des baguettes, les utiliser et essayer de les comparer avec nos opérations d'aujourd'hui ou les fabriquer.

Pour le critère du « comment », on effectue aussi une approche par module d'apprentissage, en utilisant le « pack historique ». Au niveau du « pourquoi », l'histoire comme un outil est aussi le même argument.

III. Conclusion-discussion

Dans la première partie théorique de ce mémoire, nous avons vu que les recherches récentes veulent redonner du sens à l'enseignement des mathématiques en leur donnant un meilleur cadrage, ou tout au moins en essayant de modifier celui existant pour l'améliorer. Néanmoins ces recherches visent l'enseignement secondaire et supérieur. Nous avons tenté dans ce mémoire de les adapter au niveau de l'école élémentaire tout en gardant ses spécificités comme le dispositif de la situation-problème.

Les deux fascicules créés essaient de reprendre les différents aspects de la première partie théorique et ont été analysés avec les critères du chercheur danois Jankvist. Il en ressort que pour l'école élémentaire un dispositif d'apprentissage utilisant des documents historiques ne peut utiliser l'histoire que comme un outil (argument « pourquoi »). Les élèves de l'école élémentaire ne peuvent encore percevoir le document historique comme un objectif en soi. De plus, au niveau de la mise en pratique (argument « comment »), l'utilisation d'un « pack historique » permet d'aider les professeurs des écoles qui sont des enseignants polyvalents et non spécialiste du domaine. Il les encourage dans la démarche et leur apporte un support de pistes. Car l'approche par anecdote ne sert pas suffisamment l'apprentissage.

Le document historique mathématique est un des outils dans l'apprentissage des mathématiques car par son interdisciplinarité, son originalité, son approche différente, etc, il permet de soutenir les apprentissages, de leur redonner du sens ou de renforcer l'aspect cognitif.

Dans un prolongement de ce mémoire, on pourrait envisager une mise en œuvre dans les classes des deux fascicules. Cela permettrait de les améliorer et de les compléter aux contacts d'enseignants. Puis, il faudrait définir un cadre didactique pour cette mise en œuvre et permettre son analyse. Un rapprochement avec la TAD de Chevallard semble intéressant.

Annexes

Annexe 1

(Cerquetti-Aberkane & al., 1997)

LES PREMIERS ABAQUES ROMAINS



RECHERCHER LES NOMBRES VOISINS

▲ Intentions pédagogiques spécifiques

Conduire l'élève à :

- Donner du sens aux manipulations de jetons sur l'abaque.
- Comprendre que changer de colonne revient à passer les dizaines, les centaines etc.

▲ Niveau

CM1 et CM2.

▲ Durée

Quarante à quarante-cinq minutes.

▲ Organisation

Recherches individuelles puis en structure collective.

▲ Déroulement de la séance

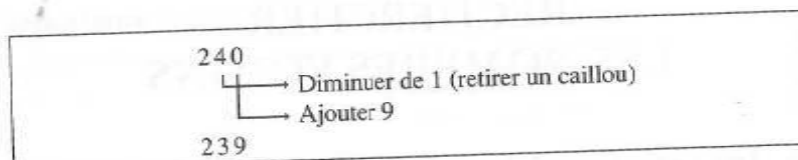
- Rappeler les procédés caractéristiques de notre base dix : dix unités dans une colonne correspondent à une unité supérieure (colonne de gauche).
- Demander aux élèves de trouver le nombre suivant sur l'abaque à partir d'une liste de nombres écrits au tableau. C'est le 9 qui est intéressant à étudier. Dans la première colonne (celle des unités) à 9 fait suite un seul jeton situé immédiatement à gauche (pour faire 10). Ne pas oublier de retirer les jetons de la 1^{re} colonne.

– Énoncer, au cours de la mise en commun, que : « *Le suivant de tout 9 d'une colonne correspond à un jeton à sa gauche et au retrait des jetons dans la colonne du 9 initial.* »

– Faire chercher le nombre précédant sur l'abaque. La même organisation (individuel-collectif) permettra de constater que cette fois, c'est le chiffre 0 dans une colonne qui complique la recherche du nombre d'avant.

– Faire remarquer que trouver le nombre précédent, c'est retirer une unité ou retirer 10 et ajouter 9.

Exemple :



Annexe 2

(Cerquetti-Aberkane & al., 1997)

LES COMPTES SUR ABAQUES ET BOULIERS



LA PRATIQUE DE L'ADDITION SUR ABAQUES

▲ Intentions pédagogiques spécifiques

Conduire l'élève à :

- Rechercher différents procédés pour effectuer des additions sur abaques.
- Dégager les principes de simplicité et de rapidité pour sommer deux nombres :
 - Comptage de jetons selon les différentes colonnes de l'abaque et échanges éventuels entre deux colonnes voisines dans un rapport de 10.
 - Recours aux compléments à 10.
 - Utilisation de calculs mémorisés.

▲ Niveau

CM1 et CM2.

▲ Durée

Environ une heure.

▲ Organisation

Recherches par groupes de deux élèves avec alternance entre chaque élève.

▲ Support utilisé

- Un abaque romain primitif ou simplifié.
- Une liste de calculs.

▲ Déroulement de la séance

- Demander une explication des trois procédés énoncés et une éventuelle aide à leur formulation en circulant de groupe en groupe.
- Distribuer une fiche de calculs permettant de rechercher des additions « romaines » :

Trouver le résultat des additions suivantes :

- 1) CCCCCCXXXXXIII + MMMMMXXIX ?
- 2) XMMXXXXX + CCCMMMMMMCCCCCXIIIIII ?
- 3) CCCCCCXXXXXIII + CCXXIII ?
- 4) MMXXXXX + XXXMMMMMMMMCCCCCCCCXXXXIIIIII ?
- 5) CCCCCCXXXXXIII + XXMMMMMMMMMMMMXXXXXIII ?
- 6) CCCCCCXXXXXIII + XXXXXMMMMCCCCCCCCXXX ?
- 7) MMCCCCCCCCXXXXXIIIIII + MCCCCCCCCII ?

- Faire exécuter les exercices sur abaques.
- Solliciter l'explication des procédures utilisées.
- Proposer la recherche de solutions simples et rapides.

▲ Remarques

- Tous les élèves abordent les quatre premiers calculs.
- 1/3 des CM2 effectuent tous les calculs.
- Les échanges en base 10 sont utilisés : « Pour faire $4 + 7$, je fais $4 + 6$ donc 10. Je change de colonne et je mets 1 aux unités. » ; « $50 + 50$, ça fait 100. Je place donc 1 jeton dans la colonne des centaines C. »
- Le complément à 10, qui nécessite un changement de colonne, est plus difficile (en particulier pour les CM1). Les élèves sont guidés, par exemple, au 6^e calcul : « Pour ajouter 4 centaines à 7 centaines, on peut ajouter 1 000 et retrancher 600. »
- Pour les abaques simplifiés dans une même colonne, les élèves font vite fonctionner le complément à 5, par exemple, au 3^e calcul : pour ajouter 4 unités à 3, ils ajoutent 5 et retranchent 1.
- Le travail collectif doit surtout s'articuler autour de calculs « clefs » extraits de la fiche recherche : $4 + 3 ?$ / $4 + 7 ?$
- Une méthode s'esquisse rapidement : « Si on n'a pas assez de jetons disponibles dans une colonne pour faire l'addition, on utilise les jetons suivants (à gauche) ; on peut donc avoir $4 + 3 = 4 + (5 - 2) = 4 + (10 - 7)$. »

- Des séances d'additions avec des nombres plus petits permettent à tous de dégager des lois, exprimées différemment.

- Voici les trois niveaux d'expressions recensés :

→ Les manipulations sur l'abaque sont décrites : « On lève le jeton au-dessus du chiffre I, et en bas, on en ajoute trois. »

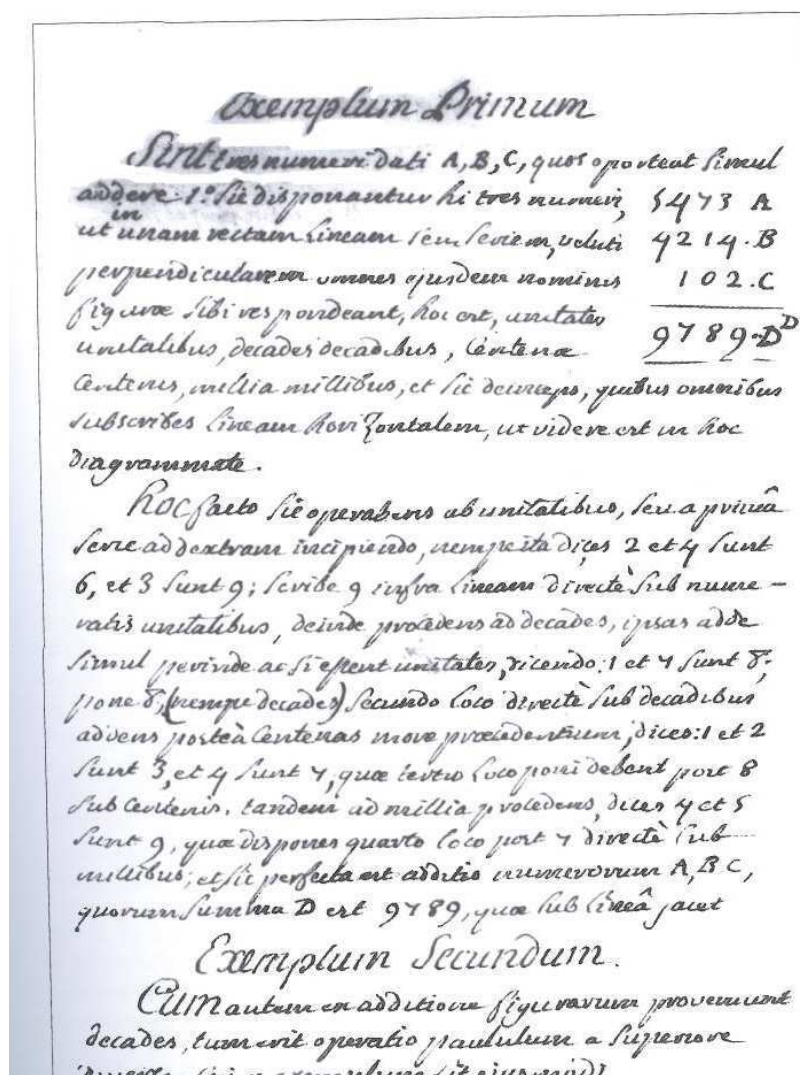
→ Les calculs sont justifiés de manière quantitative : « On ajoute 50, on enlève 40 et 7. »

→ Les explications sont « positionnelles », exploitant le rapport de 10 constant entre les colonnes : « On ajoute 5 (colonne X), on enlève 4 (colonne XI). »

Annexe 3

(Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A., 2002)

Document 1



Traduction adaptée du document n° 1 du cahier du XVII^e siècle

5473 • A
4214 • B
102 • C
9789 • D

- Disposer les trois nombres sur des lignes ; chaque chiffre dans une colonne, perpendiculaire à la ligne :
 - unités sous unités,
 - dizaines sous dizaines,
 - centaines sous centaines,
 - milliers sous milliers...
- Dire 2 et 4 font 6, et 3 font 9 ; écrire 9 dans la ligne D, sous les chiffres déjà alignés en colonnes.
- Dire 1 et 7 font 8 ; dans la deuxième colonne.
- Dire 1 et 2 font 3, et 4 font 7 ; écrire devant 8, sous les centaines.
- Dire 4 et 5 font 9 ; écrire 9.

La somme D est 9 789.

Document 2

*Sint quatuor numeri A, B, C, D, in unam summam
E colligendi. Sic dico à prima serie ad decimam incipiendo:
3 et 1 sunt 4; deinde 4 et 3 sunt 7 et 2. Itē 9 982 . A
Subscribo igitur 9 directè sub collecta serie 803 B
postea pergo ad aliam seriem, et dico. ^{ad sinistram} 61 C
9 et 6 sunt 15. deinde prætermissis illis 9493 . D
Terre quod occurrunt, dico 15 et 8 sunt 23 11339 . E
Subscribo igitur 3; et seruo, vel (ut alii loquuntur) retineo
alium caracterem nempe 2 decadium, quem jungo cum
serie sequente, et dico ^{decadum} 2 et 4 Conficiunt 6, deinde 6 et 8
sunt 14, tum denique 14 et 9 reddunt 23; Subscribo igitur
3 et iterum seruo 2 tandem dico 2 et 9 efficiunt 11. Scribo
igitur 1 directè sub 9, et appono alterum 1 decadem præter
patet quæ summam E queritam, esse 11339 et sic de cæteris*

Traduction adaptée du document n° 2

982	• A
803	• B
61	• C
9493	• D
11339	• E

Soit quatre nombres A, B, C et D à ajouter :

- Dire 3 et 1 font 4;
- puis 4 et 3 font 7 et 2 font 9;
- écrire 9 directement sous la série de nombres ajoutés.
- Dire 9 et 6 font 15;
- puis 15 et 8 font 23;
- écrire d'abord 3; ensuite prendre l'autre chiffre (caractère),
- ici 2, à ajouter aux centaines.
- Dire 2 et 4 font 6;
- puis 6 et 8 font 14;
- puis 14 et 9 font 23; écrire d'abord 3 et retenir le chiffre 2.
- Dire 2 et 9 font 11;
- écrire d'abord 1 sous le 9 et devant le 1 mettre l'autre 1.

Le résultat de la somme E est 11339.

Document 3

Delle Probe

Di queste probe, o vero esamini fanno gli autori per
assicurarsi delli errori che possono occorrere in quella
che si fa per il nome fantasma, per fallere, per
ingannare ogni volta che la lettera della prima
si cambierà, o quando qualche si tenesse una
lettera si somiglierà a l'altra, o quando si addega
o si sottrae dal nome o vero un o come si vede
nel esempio seguente nel quale la prima forma
è vera, e tutte le altre false, false per
nota, o per lettera vera.

3 2 4
2 7 2
5 4 6

1 1 4 2 forma vera
1 4 1 2 falsa per transposizione
1 2 3 2 falsa per la prima
lettera qualche si dice
a l'altra
2 4 1 9 1 falsa per additione
del nome
1 0 1 4 2 falsa per additione
del zero

ma la forma reale de l'additione e la sottrattione
alcuna le fanno sottraendo dalla forma uno delli
numeri proprii di poi del residuo l'altra cinque
ultime, e del resto si fa la forma delli numeri proprii
come si vede in questo esempio.

5 7 2 3
4 2 6 8
3 7 4 2
1 3 7 3 3

1 3 7 3 3
5 7 2 3
8 0 1 0
4 2 6 8
3 7 4 2

Traduction adaptée du document n° 3

324

272

546

1142 Somme exacte.

1412 Somme fausse par « transposition » d'un chiffre.

1232 Somme fausse.

24191 Somme fausse par ajout du 9.

10142 Somme fausse par ajout du zéro.

La preuve réelle de l'addition est la soustraction comme dans cet exemple :

13733
5723
4268
3742
13733

5723
8010
4268
3742

Annexe 4

Document 1

(Charbonnier, 2002, p.96)

Mais si tu as un nombre composé à multiplier par un nombre composé, il y a d'autres méthodes, telles que celles du *réseau*, de la *ceinture*, du *vis-à-vis* et autres; mais la plus connue est celle du *réseau*. Trace un rectangle et divise-le en carrés, et chaque carré en deux triangles, un supérieur et un inférieur, par le moyen de diagonales, comme tu le verras tout d'abord; ensuite place l'un des facteurs au-dessus de la figure, chaque chiffre au-dessus d'un carré; et l'autre facteur à la gauche, les unités en bas, au-dessus d'elles les dizaines, ensuite les centaines, et ainsi de suite. Après cela, multiplie les chiffres séparément, chacun à chacun, et pose le produit dans le carré; s'il s'y rencontre deux chiffres, les unités dans le triangle inférieur, les dizaines dans le supérieur; laisse vides les carrés auprès desquels est placé un zéro. Maintenant tout étant rempli, mets sous la figure, sans y rien changer, ce qui se trouve dans le premier triangle en bas à droite; s'il est vide, mets un zéro; c'est là le premier chiffre du produit; ensuite additionne ce qui se trouve compris entre deux transversales et pose le résultat à gauche du précédent; si l'espace est vide, mets un zéro, absolument comme dans l'addition. Par exemple; si nous voulons multiplier 62374 par 207, voici le tableau de l'opération ¹¹):

	6	2	3	7	4
2	1	2	1	6	1
0					8
7	4	2	2	4	2
1	2	9	1	4	1
					8

Document 2

Propositions d'utilisation de textes historiques pour la classe

La multiplication per gelosia

Introduction

La multiplication est une opération du champ conceptuel multiplicatif, difficile à exécuter pour les élèves. Depuis longtemps ce calcul pose problème car il nécessite une certaine abstraction de la part des élèves. Nous proposons, à travers l'étude d'un texte historique sur la multiplication, de permettre aux élèves de trouver du sens dans cette opération et d'améliorer leur technique.

I. Contexte historique général

La multiplication est une opération qui a pris différentes formes au cours de l'histoire. Dans les documents historiques comme dans les copies des élèves, on constate de nombreuses erreurs de calcul. Les algorithmes ont été précis dès le début pour faciliter ces calculs complexes. On retrouve cette précision dans les multiplications par duplication des égyptiens où l'on coche les nombres choisis pour le calcul.

Pour le calcul multiplicatif, on retrouve deux grandes catégories de supports : ceux 'par effaçage' (support de planche à poussière), ou 'sans effaçage' (sur papier, tablette, etc). Dans notre cas, la multiplication per gelosia utilise le support papier pour mémoriser les résultats et les étapes de calcul.

L'origine de cette technique n'est pas précise. Les historiens ont constaté son apparition un peu partout dans le monde à différents périodes du Moyen-Âge. On

retrouve ce mode opératoire en Chine, en Inde, en Europe ou dans la civilisation musulmane.

En Chine, les textes historiques retrouvés ne sont que des tableaux de calculs. Il n'y a pas de traces de descriptions ou d'explications. Par contre, le zéro est matérialisé par un vide dans les cases du tableau. En effet, les chinois ne le possédaient pas encore.

La civilisation arabe est celle qui a les plus anciennes traces, datant du XIII^e siècle. Ces textes contiennent des descriptions. Pour l'Europe, cette technique est utilisée durant le haut Moyen-Âge quand la numération indo-arabe et leurs algorithmes sont traduits en latin.

Dans toutes ces civilisations, le tableau est avantageux pour les calculs mais est coûteux en temps car il est long à tracer.

II. Présentation du texte historique

Ce texte décrit la méthode de calcul de la multiplication per gelosia et il est extrait de *Si les nombres m'étaient contés... Une exploration des opérations arithmétiques dans les documents originaux* de Charbonnier. La traduction française n'est pas récente, elle date du XIX^e siècle, ce qui fait de ce document une source secondaire.

Avec cet extrait on peut travailler sur la lecture dans un premier temps avec la construction du tableau. La fabrication du tableau met en jeu du vocabulaire de géométrie, notons qu'au début, les élèves ne possèdent que le texte sans le tableau. Il servira pour la correction lors de la mise en commun et de la validation. Les élèves réutilisent donc des notions qu'ils connaissent et peuvent entrer dans l'action. Ils doivent ensuite réfléchir à son fonctionnement de calcul à l'aide du texte. Ce travail peut être interdisciplinaire en étant en lien avec le français (utilisation de l'impératif), ou l'histoire (contexte, type de sources).

III. Principe de fonctionnement du tableau

Cette utilisation de tableau pour effectuer un calcul multiplicatif est une forme d'algorithme. Cette technique que nous appelons per gelosia se nomme aussi par

tableau, grillage, filets ou jalousie (traduction de gelosia). Ce terme italien désigne les fenêtres par lesquelles les femmes pouvaient observer les réunions sans être vues. Ce quadrillage ressemble à celui du tableau.

Ce procédé est adapté de la numération de position ; les retenues sont gérées facilement et n'ont pas besoin d'être mémorisées.

- Disposition

Le tableau contient autant de colonnes que le nombre de chiffres du multiplicande et autant de lignes que le nombre de chiffres du multiplicateur. Par exemple, si on multiplie 1346 par 74, on aura quatre colonnes et deux lignes.

Chaque case est divisée en deux par une diagonale allant du coin en haut à droite au coin en bas à gauche.

Cette configuration géométrique facilite les lectures et les écritures de nombres par les positions en écriture décimale.

Voici une disposition pour la multiplication de 1346 par 74.

1	3	4	6	
<div></div>	<div></div>	<div></div>	<div></div>	7
<div></div>	<div></div>	<div></div>	<div></div>	4

- Fonctionnement

Dans chaque case, on effectue un calcul élémentaire correspondant au croisement des en-têtes de la ligne et de la colonne. Le résultat est disposé avec le chiffre des dizaines au-dessus de la diagonale et le chiffre des unités en-dessous de la diagonale.

Une fois l'ensemble des calculs intermédiaires effectués, il faut additionner les nombres contenus dans les diagonales. Il se peut qu'il y ait une retenue et qu'il faille la retenir lors des additions successives.

Ce mode de fonctionnement du tableau met en jeu les notions de distributivité et d'associativité lié au calcul multiplicatif. Voici la décomposition du calcul que le tableau nous fait effectuer :

1^{ère} ligne : $(70 \times 1000) + (70 \times 300) + (70 \times 40) + (70 \times 60)$

2^{nde} ligne : $(4 \times 1000) + (4 \times 300) + (4 \times 40) + (4 \times 60)$

Le tableau évite la présence des toutes ces puissances de dix. En effet, ce sont les diagonales qui ont cette fonction.

IV. Exemples illustrant cette technique

Nous allons illustrer les explications à partir de deux exemples. Le premier est le calcul d'une multiplication sans retenue, 42 par 35. Le second est une multiplication avec retenue, 157 par 92.

- Calcul sans retenue : 42 x 35

- Les deux nombres sont 42 et 35 ; nous avons un tableau à deux colonnes et deux lignes. On place 42 au dessus des colonnes et 35 au niveau des lignes, du côté droit.

	4	2	
			3
			5

- On effectue les multiplications dans chaque case du tableau. Dans notre exemple, on effectue les calculs suivants : 4×3 ; 2×3 ; 4×5 et 2×5 . On obtient le tableau suivant après calculs :

	4	2	
	1		3
		2	6
	2		5
		0	0

- Puis, en dernière étape, on additionne les nombre de chaque diagonale. On obtient le résultat du calcul. Ici les additions sont : $0 + 1 + 6$; $2 + 2 + 0$. Les deux diagonales extérieures ne possèdent qu'une case, il suffit donc de reporter le résultat. On Place les nombres sous chaque diagonale. Le résultat se lit de gauche à droite. On obtient : $42 \times 35 = 1\,470$.

	4	2	
1	1		3
	2	6	
4	2	1	5
	0	0	
	7	0	

2. Calcul avec retenue : 157×92

- On dispose 157 en haut de chaque colonne et 92 sur la droite en face de chaque ligne.
Voici ce que l'on a :

	1	5	7	
				9
				2

- Puis, on calcule les différentes multiplications.

	1	5	7	
	9	4	6	9
	2	1	1	2
		0	4	

- On effectue les additions au sein des diagonales. Dans ce cas, nous avons des retenues. Elles peuvent être mémorisées ou bien reportées au-dessus de la diagonale suivante. On obtient le tableau ci-dessous. On a : $157 \times 92 = 14\,444$.

	1	5	7	
	(+1)	(+1)		
1		4	6	9
	9	5	3	
4		1	1	2
	2	0	4	
	4	4	4	

V. Pistes d'utilisation en classe

Ce texte peut être utilisé dans le domaine des mathématiques mais aussi en lien pluridisciplinaires avec des domaines comme le français et l'histoire. Voici une proposition de progression envisageable avec ce texte.

1^{er} temps : Découverte du texte par une activité de lecture

L'objectif est de comprendre un texte ancien. En effet ce support permet de se familiariser avec le texte. C'est une approche de lecture et des mathématiques avec une amorce différente. On peut travailler sur les tournures de phrases ou l'impératif.

Au niveau mathématique, on peut faire un rappel sur le vocabulaire lié à la multiplication (« facteurs »), à la numération décimale (« dizaines », « centaines », etc) et sur la géométrie avec les indications pour construire le tableau.

2^{ème} temps : Construction du tableau

Une fois le texte compris, on peut laisser les élèves travailler à la construction du tableau. Le travail peut être individuel puis en petit groupe pour comparer les résultats. Pour valider, on peut utiliser le tableau du support mais vide.

3^{ème} temps : Le calcul en utilisant les instructions du texte

Lors de ce moment, les élèves doivent résoudre le calcul proposé dans le document historique. Ils cherchent à comprendre le fonctionnement. Ce travail peut être dans un premier temps individuel pour s'approprier la technique puis en petit groupe pour permettre la confrontation des stratégies des élèves. On peut par la suite proposer quelques calculs à effectuer avec un tableau.

Prolongements :

Le travail avec ce type de document engendre un lien fort avec l'histoire car les élèves sont amenés à s'interroger sur la nature du document. On peut donc effectuer un travail en lien avec les sources primaires et secondaires. Les élèves peuvent s'interroger aussi sur pourquoi une traduction de l'arabe.

Bibliographie

- Charbonnier, R. (2002). *Si les nombres m'étaient contés... Une exploration des opérations arithmétiques dans les documents originaux*. IREM de Clermont-Ferrand
- Chabert, J.-L., Bardin, E., Guillemot, M., Michel-Pajus, A., Borowczyk, J., Djebbar, A. & Martzloff, J.-C., (1995). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris : Belin.

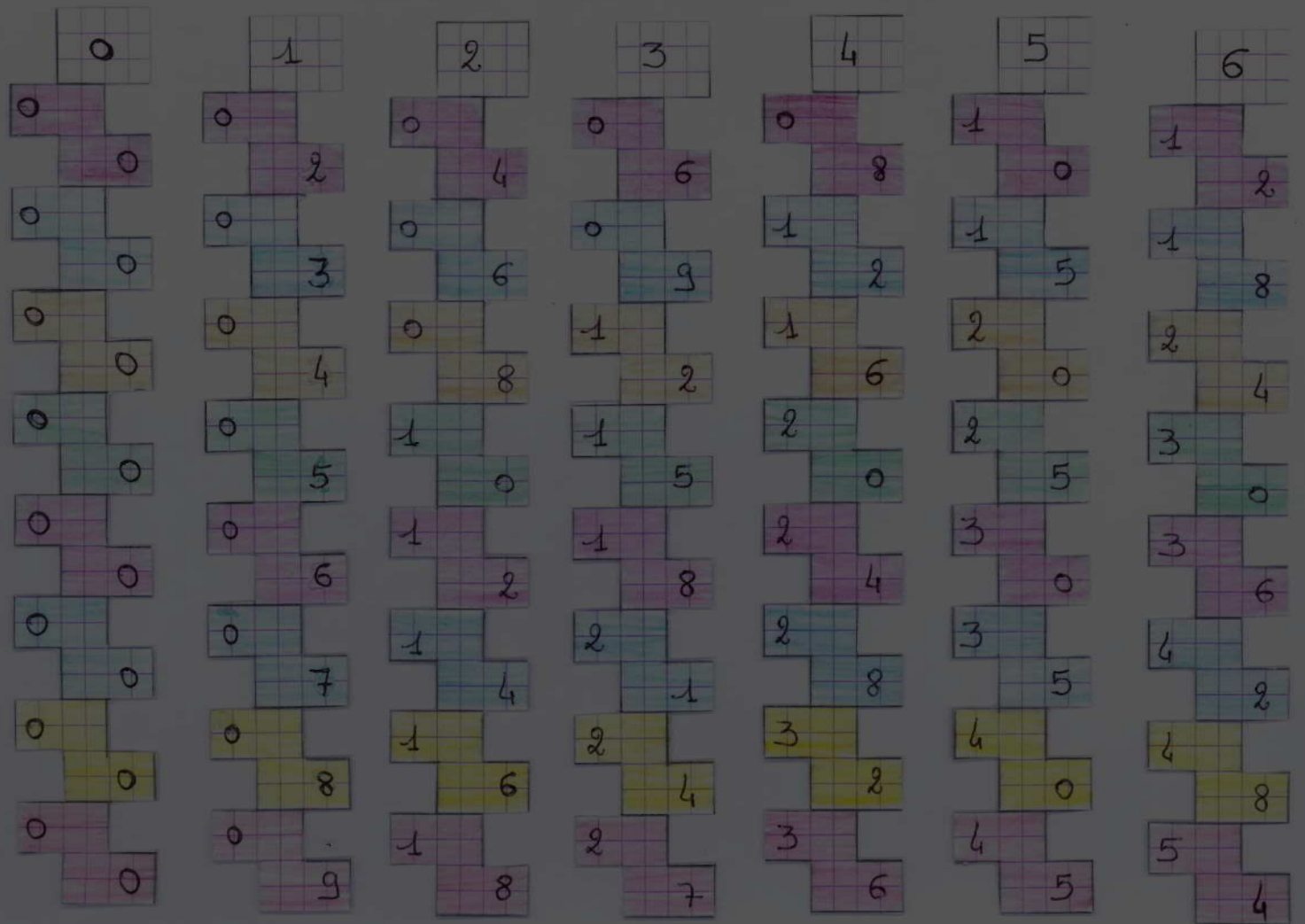
Annexe 5

Document 1

Cette année M. Rouffain a présenté à l'Académie une manière de faire les Multiplications & Divisions Arithmétiques par de petits Bâtons à l'imitation d'une Méthode du Baron Neper. On a trouvé que M. Rouffain rendoit cette Méthode plus commode & plus simple, en affermissant ces Bâtons dans un Cadre, & distinguant certaines Bandes de Chiffres par des couleurs, ce qui prévient les erreurs que pourroit produire le dérangement des Bâtons, & a paru fort bien imaginé.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
2	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
3	0	0	3	6	9	2	5	8	1	4
4	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3
5	0	0	4	8	2	6	0	4	8	2
6	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
7	0	0	5	0	5	0	5	0	5	0
8	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5
9	0	0	6	2	8	4	0	6	2	8
	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6
	0	0	7	4	1	8	5	2	9	6
	0	0	1	2	3	4	4	5	6	7
	0	0	8	6	4	2	0	8	6	4
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	9	8	7	6	5	4	3	2
										1

Document 2



Document 3

Propositions d'utilisation de textes historiques pour la classe

Les baguettes de Roussain

Introduction

La multiplication est une opération du champ conceptuel multiplicatif, difficile à exécuter pour les élèves. Depuis longtemps ce calcul pose problème car il nécessite une certaine abstraction de la part des élèves. Nous proposons, à travers la fabrication de baguette de calcul de faciliter l'apprentissage de tables de multiplication. Cet outil peut également servir d'aide pour le calcul multiplicatif ou à la compréhension de la retenue.

I. Contexte historique général

La multiplication est une opération qui a pris différentes formes au cours de l'histoire. Dans les documents historiques comme dans les copies des élèves, on constate de nombreuses erreurs de calcul. Les algorithmes ont été précis dès le début pour faciliter ces calculs complexes. On retrouve cette précision dans les multiplications par duplication des égyptiens où l'on coche les nombres choisis pour le calcul.

Pour le calcul multiplicatif, on retrouve deux grandes catégories de supports : ceux 'par effaçage' (support de planche à poussière), ou 'sans effaçage' (sur papier, tablette, etc).

Au début du XVII^{ème} siècle, Neper crée un abaque qui facilite le calcul de la multiplication par tableau très utilisé au cours du Moyen-Âge. En effet, il n'y a plus

besoin de dessiner le tableau, il suffit de lire sur des bâtons le résultat après additions. Cette invention très utile car elle facilite les calculs et fait gagner du temps. Elle subit des améliorations ou des modifications pour gagner en efficacité. Roussain, un siècle plus tard en présente une devant l'Académie des sciences.

II. Présentation du support historique

Ce document historique présente un court texte descriptif et un dessin des baguettes qui permet de les visualiser. Il est extrait de *Si les nombres m'étaient contés... Une exploration des opérations arithmétiques dans les documents originaux* de Charbonnier.

Le texte paraît être un commentaire d'un membre de l'Académie des sciences sur le travail de Mr Roussain. Cette observation est positive et montre l'intérêt suscité à l'époque. La description succincte de l'objet suivi du dessin nous permet de l'imaginer assez facilement.

Néanmoins, on peut noter que cette courte description ne nous permet pas de connaître le matériau dans lequel on était réalisé ces baguettes. On peut supposer que c'est du bois peint comme celle de Neper.

L'emboîtement des réglettes est facile et peut donc être facilement réalisé par des enfants. On peut travailler sur le calcul d'un nombre à plusieurs chiffres par un nombre à un seul chiffre.

III. Principe de fonctionnement des baguettes

Les baguettes sont très simples d'utilisation, il suffit de les emboîter les unes dans les autres.

Pour effectuer une multiplication, par exemple, 73 par 5, on encastre ensemble la baguette du 7 et du 3 pour obtenir en haut le nombre 73. Puis on lit la cinquième ligne qui contient la table de 5. On peut lire facile le résultat qui est 365. On a dû additionner mentalement 5 et 1 pour obtenir le chiffre des dizaines. En emboîtant les réglettes, les dizaines de l'une s'empilent sur les unités de l'autre. Ce qui permet de lire facilement. De plus, le fait que les baguettes soient colorées permet de ne pas se tromper.

V. Pistes d'utilisation en classe

Pour la classe, on peut envisager de les faire créer aux élèves pour que chacun possède son jeu de baguettes et puissent après le faire devenir un outil. Sinon on peut en réaliser quelques jeux mis à disposition dans la classe.

Ces baguettes ont été des outils d'aide au calcul à l'époque de leur création. Il peut être intéressant d'effectuer le même travail avec les élèves. Effectivement, elles permettent de vérifier des calculs lors d'une multiplication de deux nombres qu'ils soient à un ou plusieurs chiffres. Car on peut vérifier les calculs intermédiaires plus rapidement.

On peut donc proposer aux élèves de créer ces baguettes puis de travailler sur la notion d'outil et d'aide. On peut par exemple les utiliser à la place de la calculatrice.

Prolongements :

Le travail avec ce type de document engendre un lien fort avec l'histoire car les élèves sont amenés à s'interroger les outils dans l'histoire. On peut donc effectuer un travail en lien avec les inventeurs par exemple, en revenant sur Neper.

Bibliographie

- Charbonnier, R. (2002). *Si les nombres m'étaient contés... Une exploration des opérations arithmétiques dans les documents originaux*. IREM de Clermont-Ferrand
- Chabert, J.-L., Bardin, E., Guillemot, M., Michel-Pajus, A., Borowczyk, J., Djebbar, A. & Martzloff, J.-C., (1995). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris : Belin.

BIBLIOGRAPHIE

- Bassis, O. (2003). *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques, numération, opérations, nombres décimaux et proportionnalité*, Tome 1. Paris : Hachette éducation.
- Bernard, A., Chambon, G. & Ehrhardt, C. (2010). *Le sens des nombres, mesures, valeurs et informations chiffrées : une approche historique*. Paris : Vuibert.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Cerquetti-Aberkane, F. & Rodriguez, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.
- Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A. & Johan, P. (1997). *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3*. Paris : Hachette éducation.
- Chabert, J.-L., Bardin, E., Guillemot, M., Michel-Pajus, A., Borowczyk, J., Djebbar, A. & Martzloff, J.-C., (1995). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris : Belin.
- Charbonnier, R. (2002). *Si les nombres m'étaient contés... Une exploration des opérations arithmétiques dans les documents originaux*. IREM de Clermont-Ferrand
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. In Yves Chevallard. <http://yves.chevallard.free.fr/>

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

(février 2012).

- Guillemette, D., (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche. *Petit x*, 86, 5-27.
- IREM de Poitiers, (2011). Méthodologie de la recherche. In maths en classe.
<http://www.maths-en-classe.fr/>
http://www.maths-en-classe.fr/IMG/pdf/1methode_de_poitiers.pdf
(février 2012)
- Jankvist, U. T., (2009). A categorization of the « whys » and « hows » of using history in mathematics education. *Educational Studies in mathematics*, vol. 71, number 3, 235-261.
- Matheron, Y. & Noirfalise, R. (2007). Une recherche de la commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In *II congrès international sur la Théorie anthropologique du didactique (TAD)* : « Diffuser les mathématiques et autres comme outils de connaissance et d'action ». Uzès.
<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/archives/partenariat-inrp-08-09/Cdamperes/YMetRN.pdf>